

22.1  
В 38

**ВЕСТНИК**

**НАУЧНЫЙ СБОРНИК**

КЫРГЫЗСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
ПЕДАГОГИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

Основан в 1998 году

Серия: **Математика**  
**Физика**  
**Информатика**

**1** /1998



### Редакционная коллегия:

- Главный редактор: А. А. Борубаев - ректор КГПУ, доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН КР.
- Зам. гл. редактора: И. Б. Бекбоев - директор КИО, доктор пед. наук, проф., чл.-корр. НАН КР,
- Э. Ж. Маанаев - доктор ист. наук, проф.,
- М. Р. Рахимова - доктор пед. наук, проф.,
- М. Ж. Жумагулов - доктор. филос. наук, проф.,
- С. О. Байгазиев - канд. фил. наук, проф.,
- ответ. за выпуск А. К. Керимбеков - канд. физ.-мат. наук, проф.
- А. А. Айылчиев - канд. физ.-мат. наук, проф.,
- Ж. М. Молдобаев - канд. физ.-мат. фаук, доц.,
- Р. Ш. Ибраимов - канд. физ.-мат. наук, доц.,
- Д. Б. Бекболотов - канд. физ.-мат. наук, доц.,

Печатается по решению Ученого Совета КГПУ им. И.Арабаева

Редактор издательства: Р. Н. Курманалиева

Технические редакторы: Ж. Эралиев, А. Эсенканова

Подписан к печати: 16.03.98

Формат: 60x84 1/16

Бумага офсетная

Гарнитура: Kyrghyz Times

Объем: Уч.- изд. л. 7,25

Тираж: 200 экз.

Заказ: № 60

Издательский центр КГПУ им. И. Арабаева, 720026, Бишкек, бульв. Эркиндик, 38

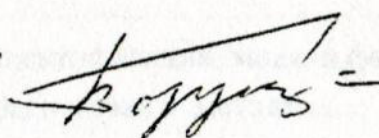


## Уважаемые читатели!

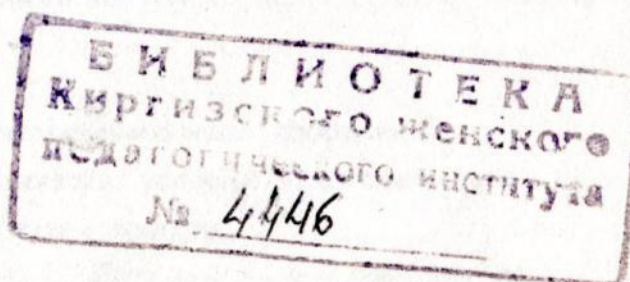
Известно, что высшее учебное заведение без научно-исследовательской работы теряет определение «высшее». Знаменитый физик Лун де Бройль говорил: « Исследования и образование почти неотделимы друг от друга и чаще всего страдают от взаимной разобщенности ».

Поэтому надеюсь, что новая серия сборников научных трудов «Вестник КГПУ» станет выразителем научных идей, на страницах которого будут публиковаться научные статьи наших ученых-исследователей, молодых преподавателей и аспирантов, а также окажется центром движения педагогической, психологической и научной мысли, вокруг которого сплотится профессорско-преподавательский состав нашего университета.

Ректор КГПУ  
им. И. Арабаева,  
профессор, член-корреспондент  
НАН КР



А. А. БОРУБАЕВ



ФИЛ. 37  
1981 г.



## КЫРГЫЗСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ПЕДАГОГИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Основан в январе 1998 г.

№ 1. 1998 г. январь-март

Издательский центр КГУУ

Выходит один раз в три месяца

### СОДЕРЖАНИЕ

#### Математика

- Борубаев А.А., Чекеев А.А.* О классификации полных равномерно непрерывных отображений..... 4
- Борубаев А.А., Чекеев А.А., Касымова Т.Д.* Об индексе полноты равномерно непрерывных отображений..... 9
- Болжиев Б.А.* Ультракompактные и  $\aleph_0$ -ограниченные пространства..... 15
- Молдобаев Ж., Нарбагва Г.* Физический смысл специальной группы преобразований, сохраняющей тензор Эйнштейна..... 23
- Канетов Б.Э.* О некоторых свойствах нароста равномерных пространств..... 28
- Керимбеков А., Эсенканова А.* Счетная система линейных алгебраических уравнений и ее связь с линейными дифференциальными уравнениями..... 33
- Джаманбаев М.Дж.* Решение задач идентификации модели фильтрации, с использованием градиентного метода..... 37
- Джаманбаев М. Дж.* Определение коэффициента теплопроводности неоднородной среды..... 43
- Байсалов Д.У.* Изучение курса "Методика преподавания математики" на основе модульного обучения..... 48

#### Физика

- Жайнаков А.Ж., Кабаева Г.Д.* Математическое моделирование термогидродинамических условий образования реза при плазменной резке металлов..... 54
- Жайнаков А., Урусов Р.М., Урусова Т.Э.* Методы расчета трехмерных



электродуговых потоков плазмы.....	58
<i>Гордеева Н.О., Жайнаков А.Ж., Урусов Р.М.</i> Особенности расчета трехмерных мгд-потоков.....	62
<i>Абдрахманов С.</i> Феноменологическое описание процесса накопления фаз при термоциклировании с учетом неполных мартенситных превращений.....	66
<i>Ибрагимов Р.Ш.</i> Влияние металлического расплава на разрушения титанового сплава.....	71
<i>Токтогулов М.</i> О параметрах уравнения свечения метеоров.....	78
<i>Ордобаева Ч.Т., Шаршеев К.Ш., Юсупов Р.Х.</i> Нурландырылган татаал сульфаттардын ЭПР спектри.....	82
<i>Айтматова Р.Т., Кидибаев М.М., Королева Т.С., Мусаев К.</i> Цинтиллятор для регистрации нейтронов .....	88
<i>Айтматова Р. Т., Тойчиев Н., Шамшиев Т.</i> Колебательные спектры ионов хромата в примесных кристаллах $KCl:CrO_4^{2-}, Eu$ .....	91
<i>Тойчиев Н., Кидибаев М.М., Королева Т.С., Мусаев К.</i> Новые парамагнитные центры в примесных кристаллах $NaF:Cu$ .....	95

## Информатика

<i>Борубаев А.А., Панков П.С.</i> Классификация компьютерных представлений топологических пространств.....	99
---	----

## CONTENTS

### Mathematics

<i>Borubaev A.A., Chekeev A.A.</i> On classification of the complete uniformly continuous maps.....	4
<i>Borubaev A.A., Chekeev A.A., Kasymova T.D.</i> On completeness index of the uniformly continuous maps.....	9
<i>Boljiev B.</i> Ultracompact and $\aleph_0$ - bounded spaces.....	15
<i>Moldobaev J., Narbaeva G.</i> Physical meaning of transformation special group preserving Einstein tensor.....	23
<i>Kanetov B.</i> On some properties of remainder uniform space.....	28
<i>Kerimbekov A., Esenkanova A.</i> Accounting system linear algebraic of equations and her communication with linear differential equations.....	33
<i>Gamanbaev M.D.</i> The determination of the warm conductivity of inhomogeneous medium.....	37
<i>Gamanbaev M.D.</i> The decision of the problem of filtration model	



identification by the use of gradients method.....	43
<i>Baisalov J.U.</i> Study of a rate «The technique of training the mathematicans» on the basis of modular training.....	48

## Physics

<i>Jainakov A.J., Kabaeva G. D.</i> Mathematical modeling of termohydrodynamic conditions of formation reza at plasma cutting of metals.....	54
<i>Jainakov A.A., Urusov R.M., Urusova T.E.</i> Methods of account threemeasures electrical arch of flows of a plasma.....	58
<i>Gordeeva N.O., Jainakov A.A., Urusov R.M.</i> Features of account threemeasures of MGD-flows.....	62
<i>Abdrakmanov S.</i> Phenomenological description of process of accumulation of phases at thermocycle in view of partial martensits conversions.....	66
<i>Ibragimov R.Sh.</i> Influence metal melted on destructions of titanyc alloy.....	71
<i>Toktogulov M.</i> About parameters of equation lighting meteors .....	78
<i>Ordobaev Ch. T., Sharsheev K. Sh., Jusupov R. H.</i> Epr spectrum of complex lighting sulfats.....	82
<i>Aitmatova R. T., Kidibaev M.M., Koroleva T.C., Musaev K.</i> Scineliator for registration of neutrons.....	88
<i>Aitmatova R. T., Toichiev N., Shamshiev T.</i> Oscillatory spectrums of ions khromat in primesnix the crystals $KCl:CrO_4^{2-}, Eu$ .....	91
<i>Toichiev N., Kidibaev M. M., Koroleva T. S., Musaev K.</i> New paramagnetic centres in primesnix the crystals $NaF:Cu$ .....	95.

## Computer science

<i>Borubaev A. A., Pankov P. S.</i> Classification of computer presentation of topological spaces.....	99
---	----



УДК 532.6:539.2

## **ВЛИЯНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО РАСПЛАВА НА РАЗРУШЕНИЯ ТИТАНОВОГО СПЛАВА**

**Р. Ш. Ибрагимов**

Охрупчивание пластичных конструкционных металлических сплавов в контакте с некоторыми припоями или металлическими расплавами, исследован многими авторами [1-10]. В работах [1-4] авторы данную проблему рассматривают с точки зрения термодинамики, то есть, считают,



что охрупчивание наблюдается только в случае резкого понижение удельной поверхностной энергии твердого тела на границе с расплавом. Однако такой подход к данной проблеме не объясняет кинетики разрушения металлических материалов в контакте с расплавом. Согласно авторам работы [1,3,4] атомы расплава непосредственно присутствуют в вершине движущейся трещины вызывая изменение характера разрушение [6,7], а авторы работы [5] допускают, что атомы расплава в вершине трещины ослабляют когезивных связей атомов твердого тела. Имеется и другая точка зрения развиваемое авторами работы [8,9], где первичным эффектом влияние расплава на твердое тело считают не охрупчивание, а зернограничное пластифицирование—понижение предела текучести и коэффициента деформационного упрочнение зернограничных прослоек. Если принимать во внимание классические работы А. В. Степанова, о том, что, всякому разрушению, даже предельно хрупкому, предшествует пластическое течение, то сильное пластифицирование, особенно по границам зерен, может вызывать резкое охрупчивание. До настоящего времени не выяснены некоторые особенности изломов в твердом теле полученных в контакте с расплавами. В частности, в работах [6,7] отмечаются причудливая форма изломов в металлическом твердом теле, разрушенное в контакте с металлическими расплавами. Такие же явления обнаруживаются на фотографиях в работе [5]. Данная работа посвящена изучению характера разрушения и кинетики роста трещины в металлическом твердом теле в контакте с металлическим расплавом.

Для проведения исследования был выбран промышленный однофазный титановый сплав ВТ5-1, после промышленных режимов термической обработки. В качестве металлического расплава использован амальгама индия. Предварительный анализ изломов, многих конструкционных (алюминиевых, магниевых и титановых) сплавов и сталей, полученных в контакте с металлическими расплавами, показал, что, характер изломов сплава ВТ5-1 сильно реагируют изменению условий испытания (скорость, температура, напряженного состояния, величина упругой энергии) и химического состава расплава. Для статического испытания на трех точечный изгиб использован стандартные образцы, для



определения ударной вязкости, с поперечным сечением  $10 \times 10 \text{ мм}$ , с надрезом глубиной  $2 \text{ мм}$  и радиусом закругления на дне надреза  $1 \text{ мм}$ . Считается, что испытание на изгиб является более мягким способом нагружения, нежели, например, испытание на растяжения. Это позволяет успешно применять испытания на изгиб для оценки прочности хрупких материалов, и в частности, материалов в случае охрупчивания в контакте с расплавами. Кроме этого, такой способ испытания облегчает исследованию кинетики роста трещины, характера разрушения и поверхности изломов в связи с тем, что, на изломах образцов легко можно дифференцировать начальные участки разрушения, стадии последующего роста трещины и долом образца. Испытания образцов проводили на испытательной машине "Инстон-ТТ-СМ" при скорости перемещения подвижного захвата  $5 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$  при комнатной температуре. На самописце испытательной машины записывали диаграмму зависимости "нагрузка  $P$ —прогиба  $f$ ". По площади диаграммы " $P$ - $f$ " определен энергоемкость излома, то есть, накопленная упругая энергия в системе "испытательная машина—образец" на момент начало разрушения. Уровень накопленной упругой энергии в системе "испытательная машина—образец" регулировали созданием зародышей трещин на дне надреза. Кинетика роста трещины определен по результатам кинематографирование боковой поверхности образцов в процессе разрушения, кинокамерой "СКС-1", со скоростью съемки  $250 \text{ кадров в секунду}$ . Разрушенные образцы очищали от амальгамы погружением в азотную кислоту. Исследование макроскопического характера разрушение образцов проведены на бинокулярном микроскопе "МБС-10". Оптическое исследование и микрофотографирование произведен на микроскопе "Неофот-2", микрофрактографическое исследование—на растровом электронном микроскопе "Тесла ВС-301".

Результаты макроскопического анализа характера разрушения образцов показывают что изломы бывают двух типов (рис. 1). У первого типа изломов макроповерхности разрушения совпадают с плоскостью действия наибольших нормальных напряжений (рис. 1а), у второго типа изломов макроповерхности разрушения совпадают с плоскостью действия наибольших касательных напряжений (рис. 1б). По классификацию Н. Н.

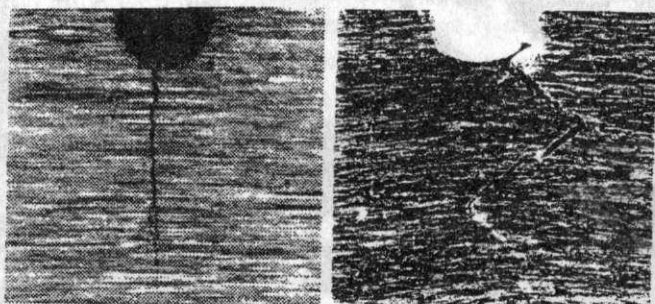
Давыденкова представленные типы изломов называются "хрупкими" и "вязкими" разрушениями соответственно. Такие типы изломов должны отличаться друг от друга по энергоёмкостью разрушения, по кинетике роста трещины и по характеру разрушения на микроуровне. Энергоёмкости разрушения для хрупкого излома составляли  $(2\text{---}5) \cdot 10^{-2}$  Дж, для вязкого излома  $-(9\text{---}35) \cdot 10^{-2}$  Дж. Эти экспериментальные значения энергоёмкости изломов на два порядка превышают значения потенциальной энергии деформации образцов при изгибе вычисленные методами теории прочности.

Проведенные исследование кинетики роста трещины показывают, что "хрупкая" трещина растёт со средней скоростью  $(1\text{---}2,5) \cdot 10^{-2}$  м/с, тогда как, средняя скорость "вязкой" трещины составляет  $(7\text{---}20) \cdot 10^{-2}$  м/с (рис. 2). Рост трещины происходит ступеньками, то есть, в течении некоторого времени вершина трещины задерживается на одном месте, а в какой то момент времени трещина скачком увеличивает свою длину. В таблице представлены некоторые параметры кинетики роста трещины для некоторых изломов. В случае роста трещины по плоскости действия наибольшего касательного напряжения наблюдается ветвление. Вторичные трещины, как правило, возникают и распространяются по плоскости перпендикулярной к первичной трещине. При этом первичные трещины замедляют свой рост и вскоре останавливаются. Средняя скорость магистральной трещины, не зависимо от изменение направления роста, остаётся постоянной.

Таблица

Энергоёмкость изломов, $E_n, 10^{-2}$ Дж	Средняя скорость трещины, $V_{cp}, 10^{-2}$ м/с	Задержка трещины, $\Delta t$ , сек.	Длина прироста, трещины, $\Delta L, 10^{-3}$ м	Скорость трещины в момент скачка, $V_{ск}, 10^{-2}$ м/с
2	1,5	> 0,004--0,036	0,3--0,65	7,5
4	2,0	> 0,004--0,008	0,13--0,20	5--6
18	8,0	< 0,004	0,7--1,3	17--34
29	17,0	< 0,004	1,2--3,5	32--48

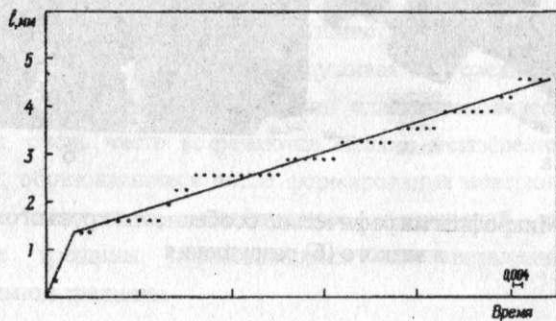




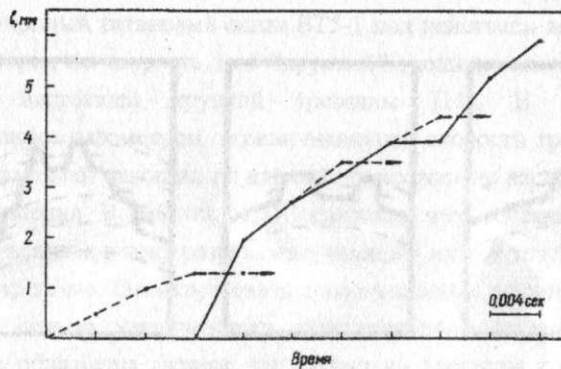
а

б

Рис. 1. Типы макроизломов: хрупкая (а), вязкая (б)



а



б

Рис. 2. Кинетика роста трещины при разрушении по хрупкому (а), и вязкому (б) механизму



Рис. 3. Микрофрагтографические особенности хрупкого (а) и вязкого (б) разрушения

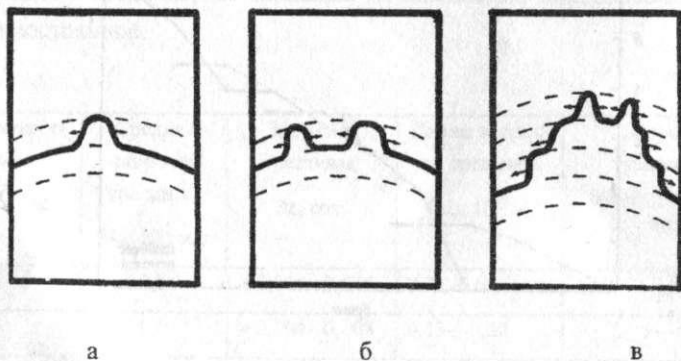


Рис. 4. Возможный механизм движения фронта трещины



Микрофрактографические исследования (рис.3) показывают что на поверхности хрупкого типа изломов разрушение происходит преимущественно по границам зёрен (рис. 3а), тогда как по поверхности вязкого типа изломов разрушение – преимущественно по телу зёрен (рис. 3б). На поверхности хрупкого типа изломов (рис. 3а) обнаруживаются следующие элементы разрушения: на зернограницных фасетках заметны выходы параллельных полос скольжений, отдельные из этих полос, в редких случаях, раскрываются образуя гладкие транскристаллитные фасетки, встречаются зернограницные трещины. На поверхности вязкого типа изломов (рис. 3б) имеются элементы разрушения такие как параллельные полосы скольжения на зернограницных фасетках, раскрытые подосы скольжения, сколы по телу зёрен со ступеньками скола и речными узорами, на поверхности большинство, и зернограницных, и транскристаллитных, фасеток обнаруживаются следы мелкодисперсных ямок свидетельствующий локализации пластической деформации. Кроме сказанных, очень часто встречаются мелкие межзёренные трещины, по видимому, образовавшиеся после формирования поверхности излома под действием остаточных механических напряжений второго рода и вторичные трещины образовавшиеся при ветвлении движущегося магистральной трещины.

Переходим к анализу результатов исследований. Несмотря на то, что, конструкционный титановый сплав ВТ5-1 под действием амальгамы индия охрупчивается, но скорость этой “хрупкой” трещины значительно меньше скорости настоящей хрупкой трещины [11]. В нашем случае определяющим параметром ограничивающий скорости трещины является скорость доставки расплава по клиновидному каналу растущей трещины в зону разрушения. В работах [1,3,4] считают, что, основным механизмом доставки расплава в зону разрушения является вязкое течение расплава по растущей трещине. Однако, в связи с уменьшением ширины трещины у её вершины, сильно увеличивается сопротивление течению расплава, в результате образуется мениск, не доходя до вершины трещины [4]. По-видимому, дальнейшая транспортировка атомов расплава от мениска в зону разрушения происходит, либо путем растекание [3], либо –

поверхностной диффузией [4]. Скачкообразная рост трещины обнаруживается и тогда, когда разрушение материала происходит на воздухе, не зависимо от того, что, она хрупкая [11], или вязкая. Факт остановки и старта трещины в данном случае можно интерпретировать так. Примерно на середине остановившегося фронта трещины выбрасывается язычок трещины и передний фронт язычка практически остаётся на месте, а боковые фронты растёт пока не выйдут на поверхности образца (рис. 4а). В этот момент завершится предшествующая стадия роста трещины и начинается следующая стадия роста трещины с выбросом нового язычка. С увеличением скорости хрупкой трещины, возможно, с фронта трещины выбрасываются несколько язычков, но самое главное, по-видимому, следует предположить, что, пока данная стадия роста не завершиться новые язычки с нового фронта трещины не выбрасывается (рис. 4б). Таким образом, разрушения -- процесс непрерывное, какой то участок фронта трещины всегда находится в движении. Только при таком допущении движения фронта трещины, получим кинетическую диаграмму такой как на рис.2а. В случае вязкого типа излома на кинетической диаграмме не заметны скачки роста трещины (рис. 2б) Это не дает обоснование считать ,что, механизм вязкого разрушения отличается от хрупкого, но необходимо учитывать вклад пластической деформации предшествующее и сопутствующее разрушению. Во-первых, на фронте разрушения может появиться одновременно несколько язычков трещины, во-вторых, до завершения данной стадии роста трещины, возможно, на новом фронте начинается следующая стадия с выбросом новых язычков (рис. 4в). Расчет скорости фронта трещины, перпендикулярное направлению магистральной трещины, для хрупкого излома составляет 0,1—1,2 м/с., а для вязкого излома -- более чем 2--3 м/с. В работе [4], когда расплав наносился вдоль всего пути трещины, скорость распространения трещины достигала ~ 5,75 м/с. При таком механизме распространение трещины, доставка расплава в зону разрушения облегчается. Теперь выясним обнаруженный факт, о том, что, скорость хрупкой трещины значительно меньше чем скорость вязкой трещины, в условиях охрупчивания в присутствии расплава. По видимому, здесь скорость доставки расплава в зону разрушения в вязких изломах больше чем в хрупких изломах, в связи с большим углом раскрытия вязкой



трещины. Это подтверждается тем, что, на микрофрактографических снимках вязких изломов обнаруживается большое количество энергоемких элементов квазихрупкого и вязкого разрушения (рис. 3). В случае формирования вязкого излома, избыточная упругая энергия накопленная в системе "испытательная машина – образец", способствует увеличению степени пластической деформации предшествующей и сопутствующей разрушению, а это вызывает увеличению угла раскрытия трещины. В результате чего, значительно уменьшается сопротивление канала к вязкому течению расплава, следовательно скорость транспортировки атомов расплава к вершине трещине. Формирования макроскопически хрупкие и вязкие типы изломов обусловлены, по-видимому, напряженным состоянием твердого тела в вершине растущей трещины. В случае хрупкого излома в вершине движущейся трещины реализуются объемно напряженное состояние, а при вязком разрушении, в вершине трещины в связи с пластической релаксацией — состояние плоской деформации.

Автор благодарит доктора технических наук, профессора Ю. П. Суркова за участие в обсуждении полученных результатов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лихтман В. И., Шукин Е. Д., Ребиндер П. А., Физико-химическая механика металлов, М.: Изд. АН СССР, 1962 —
2. Потак Я. М., Хрупкое разрушение сталей и стальных деталей. —М.: Оборонгиз, 1955.—
3. Ребиндер П.А. Шукин Е. Д., Поверхностные явления в твердых телах в процессах их деформации и разрушения. — Успехи физических наук. Т. 108, № 1, с. 3, (1972).
4. Ростокер У., Мак-Когги Дж., Маркус Г. Хрупкость под действием жидких металлов. — М ИИЛ. 1962. — 176 с.
5. Вествуд. А., Прис К., Камдар М., — В сб.: Чувствительность механических свойств к действию среды. — М Мир, 1969, стр.118-180.
6. Коровский Ш.Я. Некоторые особенности строения изломов в поверхностно-активных средах. — ДАН СССР. Т. 207, № 3, с 576—579.(1972).

7. Гавзе М. Н. Влияние ртутного покрытия на характер разрушения стальных образцов. – Известия АН СССР. “Металлургия и горное дело”. 1964, № 2, с. 143-148.
8. Сурков Ю. П., Рыбалко В. Г., Сычева Т. С. Влияние жидкометаллической среды на характер разрушения стали Ст3 при статическом и циклическом нагружении. – ФХММ, 1988, № 5, с. 9—13.
9. Сурков Ю. П., Соколова О. М., Павлов М. Ю. Влияние адсорбционно—активного жидкометаллического расплава на пластическую деформацию стали. – ФММ, 1993, № 1, с. 152—158.
10. Капп Дж., Дюкетт Д., Камдар М. Механизм роста трещины в алюминиевых сплавах в условиях жидкометаллического (ртутного) охрупчивания. — Теоретические основы инженерных расчетов 1986, № 1, с. 57—70.
11. Финкель В. М. Физика разрушения. М. Metallurgia. 1970, с. 376.



УДК

**ИЗУЧЕНИЕ КУРСА "МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ" НА  
ОСНОВЕ МОДУЛЬНОГО ОБУЧЕНИЯ**

**Дж. У. Байсалов**

При переходе на модульное обучение нами определена система действий для профессорско педагогического состава.

Во-первых, разработка рабочей программы на модульной основе.

Во-вторых, перед разработкой рабочей программы на модульной основе, нами уточнены основные методические идеи курса "методика преподавания математики".

Во-третьих, вокруг этих уточненных идей построили учебное содержание каждого конкретного модуля.

В-четвертых, при разработке рабочей программы на модульной основе, мы существенно опирались на основные принципы распределения учебного материала на модули.

В-пятых, перед изучением материала каждого конкретного модуля, нами предусмотрены проведение стартового контроля знаний и умений студентов, с целью определения стартовой готовности студентов-математиков к усвоению материала-модуля. Здесь нами предусмотрены соответствующие мероприятия по коррекции знаний.

В-шестых, нами предусмотрено при изучении материалов каждого модуля проведение текущего и промежуточного контроля.

В-седьмых, нами предусмотрено после завершения изучения материалов модуля проведение итогового контроля, путем приема модуля. Результаты итогового контроля, приема модуля показывает уровень усвоения студентов материалов модуля.

В-восьмых, при конструировании учебного материала модуля, нами предусмотрены элементы дифференцированной подачи содержания второго и третьего подкомпонента модуля. Нижним пределом была уровень обязательной подготовки.

В-девятых, при структурировании учебного материала модуля, нами планировалась деятельность студентов-математиков по усвоению элементов знаний по следующей последовательности: восприятие; понимание; осмысление; запоминание; применение; обобщение; систематизация.

В-десятых, при структурировании учебного материала модуля, нами заранее заложены задания, дающие возможность повторения отдельных, т.е. наиболее трудных вопросов.

Организация учебного процесса на модульной основе не должна происходить стихийно без предварительной подготовки. Она должна происходить на основе специальной программы, где должны быть четко расписаны все моменты взаимодействия преподавателя и студента-математика.

Таким образом, основным средством реализации модульного обучения, является рабочая программа построенная на модульной основе. От качества построения содержания каждого модуля, прямым образом зависит эффективность учебного процесса в целом.

Подготовка рабочей программы на модульной основе, трудоемкая и кропотливая работа, требующая от преподавателя большой компетентности. При моделировании рабочей программы курса, "Методика преподавания математики" на модульной основе мы руководствовались принципами построения модульных программ, разработанным профессором П.А. Юцявичине.

Это следующие принципы:

- а) Принцип целового назначения информационного материала.
- б) Принцип сочетания комплексных, интегрирующих и частных дидактических целей.
- в) Принцип полноты учебного материала в модуле.
- г) Принцип относительной самостоятельности элементов модуля.
- д) Принцип реализации обратной связи.
- е) Принцип оптимальной передачи информационного и методического материала.

Экспериментальная рабочая программа по курсу "Методика преподавания математики" составлена на основе следующих государственных документов:

- типовая программа педагогических высших учебных заведений по курсу "Методика преподавания математики";
- учебный план физико-математического факультета Кыргызского Государственного Педагогического университета имени И.Арабаева;
- квалификационная характеристика преподавателя математики и информатики.

Курс "Методика преподавания математики" в нашем университете реализуется с помощью лекционных, практических, семинарских занятий и лабораторных работ.

На лекционных занятиях предполагается устное изложения учебного материала.



На практических (семинарских) занятиях:

- детально изучаются программы, учебники и учебные пособия;
  - обсуждается методика изучения различных тем школьного курса математики и приводится сравнительный методический анализ изложения одной и той же темы различных учебных пособий;
  - рассматривается планирование учебного материала и обсуждаются составленные студентами конспекты отдельных уроков;
  - анализируются методы решения задач.
  - составляется и обсуждается тематика внеклассных мероприятий.
- Лабораторные занятия включают следующие виды работ:
- наблюдение и анализ уроков в школе;
  - подготовка к проведению уроков с применением технических средств обучения;
  - изготовление наглядных пособий и подготовка дидактических материалов;
  - анализ опыта передовых учителей математики.

Рабочая программа по курсу "Методика преподавания математики" условно разделена на два раздела.

Первый раздел. "Общая методика преподавания математики". Она представляет собой контретизацию дидактики (теорию обучения) с учетом специфических особенностей математики как учебного предмета. В нем раскрываются на психолого-дидактической основе общие идеи, положения и общие рекомендации.

Второй раздел "Специальная методика преподавания математики". Она представляет собой применение общей методики к изучению конкретных тем школьного курса математики.

Курс "Методика преподавания математики" на основе выше изложенных принципов и требований разбита на 9 модульных звеньев. Из них на общую часть - 3 модуля на специальную часть - 6 модулей.

Каждый модуль содержит следующие структуры:

- 1) Порядковый номер и название модуля.
- 2) Мотивационно-стимулирующий компонент модуля.
- 3) Операционно-познавательный компонент модуля. Она состоит из трех подкомпонентов. Это:

- лекционная часть;
- практическая часть;
- лабораторные работы;
- 4) Консультационная часть.
- 5) Прием модуля.

Предложенная структура модуля позволяет в простой и наглядной форме выделить внутри каждого конкретного модуля его внутренние и внешние связи. А это в свою очередь позволит давать научно-обоснованные методические рекомендации по активному и сознательному изучению содержания каждого конкретного модуля.

Модульное построение курса "Методика преподавания математики" дает ряд значительных преимуществ и является одним из эффективных путей интенсификации методической подготовки студентов-математиков к после вузовской профессиональной деятельности в качестве учителя математики.

Педагогический эксперимент показал эффективность модульного обучения. Во-первых резко усилился активность и самостоятельность студентов. Во-вторых при модульном обучении как и предусматривалось при планировании курса, оказалось возможным несколько уменьшить количество лекционных часов. Тематическое распределение на модули курса "Методики преподавания математики" представлено в таблице.

№	Название модуля	количество час.
1.	Общие вопросы методики преподавания математики в средней школе.	22 - часов
2.	принципы и методы обучения математике.	30 - часов
3.	Организация обучения математике	24 - часов
4.	Методика изучения числовых систем.	24 - часов
5.	Методика изучения уравнений и неравенств.	26 - часов
6.	Методика изучения функций.	28 - часов
7.	Методика изучения элементов высшей математики.	26 - часов
8.	Методика изучения планиметрии.	18 - часов
9.	Методика изучения стереометрии.	24 - часов

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Байсалов Дж.У. Проблемы модульного обучения в современной системе высшего образования. - В сб. Социально-экономические и правовые проблемы на современном этапе. - часть 3- Бишкек, 1997 г. с. 38-44.
2. Байсалов Дж.У. Модулдук технологиянын окуу процессинде колдонулушу. Сборник научных трудов КГПУ им. И.Арабаева - 2 - выпуск. - Бишкек, 1997 г. с. 504-510.
3. Бандаренко М.Ф. Модульный метод обучения. Методические рекомендации для преподавателей. -Л., 1990 г.
4. Тимофеева Ю.Ф. Роль модульной системы высшего образования в формировании творческой личности педагога-инженера. Высшая образование в России. - 1993 г., №4
5. Чечель И.Д., Горский В.Д. Блочно-модульный подход к построению программы трудовой подготовки школьников.
6. Новые исследования в педагогических науках. Сост. И.К. Журавлев. - М., Педагогика. 1989 г., - №111, - с. 60-65.



## Информатика

УДК 515.12

### КЛАССИФИКАЦИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

А. А. Борубаев, П. С. Панков

Развитие компьютерной техники поставило вопрос о представлении с ее помощью всех известных математических объектов как в теоретических, так и в прикладных целях. В данной статье мы проводим обзор известных представлений для топологических пространств и вводим соответствующие определения.

Одним из первых приложений компьютеров явилось использование линейных многомерных пространств для решения прикладных, в особенности оптимизационных задач. С появлением сначала графопостроителей, а потом - дисплеев, на которых стало возможным представлять не только тексты, но и различные изображения, на основе начертательной геометрии возникла «компьютерная графика» - изображение трех-мерных объектов на плоскости (с учетом перекрытия, теней, перспективы и т.д.).

Далее мы будем рассматривать представление пространств, отличных от трехмерного евклидова, в теоретических целях.

Насколько известно, впервые алгоритмический метод представления метрических пространств был предложен в [1]. В [3] было показано, что такое представление даст возможность доказательства теорем в различных разделах математики.

В [2] был поставлен вопрос о решении задач в четырехмерном пространстве с помощью компьютера, но не указано конкретного представления, в [5] описаны некоторые алгебраические алгоритмы.

Обзор современных программных средств [7-10] показал, что возможности компьютеров в данном вопросе не использованы полностью - применяются те же приемы, что и в [6].

В связи с этим нами была предложена методика изображения неевклидовых пространств с помощью движения [11-12]. Однако в этих ста-

тых были реализованы конкретные примеры, но не было введено общих определений.

С учетом опыта выполнения проекта [13] и работы над проектом "Компьютерное представление многомерных пространств" введем следующие определения.

Пусть заданы абстрактное множество  $G$  и прямоугольник  $D$  с обычной евклидовой метрикой  $\rho$  (экран дисплея). Для простоты ограничимся двуцветным (черно-белым) изображением и введем множество  $2^D$  всевозможных подмножеств  $D$ . Обозначим через  $J \subset 2^D$  некоторое множество, которое будем называть множеством изображений (черным цветом на белом прямоугольнике  $D$ ). (От реального экрана прямоугольник  $D$  отличается тем, что он непрерывен, но современные дисплеи с большой разрешающей способностью также создают ощущение непрерывности). Будем рассматривать функции  $F: G \rightarrow 2^J$  (которая каждому элементу множества  $G$  ставит в соответствие множество возможных изображений этого элемента) и ("обратную" к ней) функцию  $H: J \rightarrow G$  (которая каждому изображению ставит в соответствие элемент множества  $G$ ). Введем также неформальное понятие "дополнительного изображения" других элементов множества  $G$ , которые входят в основное изображение.

Ниже будем считать, что  $J$  содержит только замкнутые множества, и введем в нем хаусдорфову метрику (которая больше всего соответствует интуитивному представлению "близости" изображений).

Если в  $G$  задана структура топологического пространства, то

Определение 1. Если функции  $F$  и  $H$  непрерывны, то они называются непрерывным (экранным) представлением топологического пространства (слово "экранный" далее будем опускать).

Определение 2. Если также для любого  $g \in G$  объединение  $\cup F(g)$  элементов множества  $F(g)$  содержит дополнительные изображения всех элементов некоторой окрестности  $g$ , но не содержит дополнительных изображений элементов внешности некоторой другой (более широкой) окрестности, то пара функций  $F$  и  $H$  называется естественным представлением топологического пространства.

Представления [6-10] можно считать удовлетворяющими определению 1, но они не удовлетворяют определению 2. Отметим еще, что в топологии систематически изучаются вложения одних пространств (в целом) в другие, а здесь мы рассматриваем представления отдельных элементов (вместе с их окрестностями).

Если, дополнительно, в  $G$  задана структура равномерного пространства, согласующаяся с его топологической структурой, то

**Определение 3.** Если существуют два таких окружения диагонали  $V$ ,  $W \in G \times G$  [3], что для любого  $g \in G$  множество  $\cup F(g)$  содержит дополнительные изображения всех элементов среза  $V[g]$  (некоторой равномерной окрестности) элемента  $g$ , но не содержит дополнительных изображений элементов внешности среза  $W[g]$  (более широкой равномерной окрестности), то пара функций  $F$  и  $H$  называется равномерным представлением топологического пространства  $G$ .

Если, дополнительно, в  $G$  задана также согласованная структура метрического пространства, то

**Определение 4.** Если дополнительные изображения в любом изображении множества  $F(g)$  обратно пропорциональны по размерам расстояниям до соответствующих элементов, то пара функций  $F$  и  $H$  называется метрическим представлением топологического пространства  $G$ .

Если, дополнительно,  $G$  является локально евклидовым, то

**Определение 5.** Если расположение дополнительных изображений в любом элементе множества  $F(g)$  соответствует правилам перспективы, то пара функций  $F$  и  $H$  называется геометрическим представлением топологического пространства  $G$ .

Примеры непрямоугольных непрерывных кривых показывают, что этих определений еще недостаточно для изображения движения и использования геометрической интуиции человека.

В связи с этим и с [11-13] введем следующее

**Определение 6.** Кинематическим изображением связного метрического пространства на компьютере будем называть такую программу, что

1) имеется возможность перехода от изображения любого элемента к изображению любого другого элемента;



2) минимальное время для замены одного изображения другим пропорционально расстоянию между соответствующими элементами;

3) все изображения на дисплее соответствуют некоторым элементам пространства и изменяются непрерывно (по хаусдорфовой метрике).

Мы надеемся, что последовательное изучение пространств, представимых в такой форме, будет способствовать развитию топологии и популяризации ее достижений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шанин Н.А. Конструктивные вещественные числа и конструктивные метрические пространства // Труды МИАН им. В.А. Стеклова, 1962, т. 67, с. 15-294.
2. Улам С. Нерешенные математические задачи. - Москва: Наука, 1964. - 168 с.
3. Панков П.С. Доказательные вычисления на электронных вычислительных машинах. - Фрунзе: Илим, 1978. - 179 с.
4. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. - Фрунзе: Илим, 1990. - 171 с.
5. Матвеев С.В., Фоменко А.Т. Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. - Москва: Наука, 1991. - 301 с.
6. Франсис Дж. Книжка с картинками по топологии. - Москва: Мир, 1991. - 240 с.
7. Cox D., Francis G., Idaszak R. Computer program "Venus". - University of Illinois and NCSA, 1997.
8. MATLAB(R) Version 4.0 and SIMULINK(TM) Version 1.2c for MicrosoftWindows, (c) 1993 The MathWorks, Inc.
9. "Mathematica 3.0" Graphics Gallery \ 3D Graphics \ Riemann Surface 1 & 2, (c) 1988-1996 Wolfram Research.
10. Trott M. Visualization of Riemann surfaces of algebraic functions // Mathematics in Education and Research, TELOS, 1997, Vol. 6, No. 4. - P. 15-36.
11. Панков П.С., Баячорова Б.Ж. Применение компьютеров для представления неевклидовых топологических пространств // Материалы 6-й

---

международной конференции по компьютерной графике и визуализации, том 2. - Санкт-Петербург, 1996. - С. 232-233.

12. Панков П.С., Баячорова Б.Ж. Программное обеспечение для управления решением дифференциальных уравнений на римановых поверхностях. - IV Республиканская конференция "Компьютеры в учебном процессе и современные проблемы математики". Бишкек: КГПУ, 1996. - Часть I, с. 39-41.
13. Отчет о научно-исследовательской работе "Компьютерное представление топологических объектов"/ научный руководитель П.С. Панков. - Бишкек: Департамент по науке и новым технологиям МОНК КР, 1997.

**КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СПЕКТРЫ ИОНОВ ХРОМАТА В ПРИМЕСНЫХ  
КРИСТАЛЛАХ  $KCl:CrO_4^{2-}$ ,  $Eu$** **Р. Т. Айтматова, Н. Тойчиев, Т. Шамшиев**

В последние годы особый интерес вызывает изучение колебательных и электронных спектров примесных молекулярных ионов в щелочногалоидных кристаллах. К числу таких примесей относятся оксионы шестивалентного хрома. Молекулярные примеси, внедренные в решетку кристаллов, обнаруживают спектр, связанный с их внутренними колебаниями, который может значительно изменяться по сравнению со спектром свободного иона из-за влияния возможных соседних дефектов. Исследование такого модифицированного колебательного спектра является одним из методов изучения механизмов образования молекулярных комплексов в кристаллах.

В данной работе исследованы колебательные спектры кристаллов хлористого калия, содержащих ионов хромата и двухвалентного европия.

Исследованные кристаллы были выращены методом Киропулоса на воздухе в платиновом тигле из соли хлористого калия особой чистоты. Примеси добавлялись в расплав в виде 0,5 моль% и 0,05 моль%  $K_2C_2O_4$ . Колебательные спектры измерены на спектрофотометре Specord 75 IR. Спектры регистрировались в интервале от комнатной до  $650^{\circ}C$ . Температура измерялась железоконстантановой термопарой.

В спектре исследованных кристаллов, измеренных при комнатной температуре наблюдается ряд полос поглощения с максимумами при 850, 877, 890, 921 и  $938\text{ см}^{-1}$ . Эти полосы отличаются друг от друга интенсивностью и шириной. Полосы при 877, 921 и  $938\text{ см}^{-1}$  имеют примерно одинаковую ширину и интенсивность. И кроме того более интенсивны, чем остальные. Следует отметить, что указанные полосы не наблюдаются в чистых кристаллах хлористого калия и  $KCl:Eu^{2+}$ . Это позволяет заключить, что наблюдаемые полосы обусловлены ионами  $CrO_4^{2-}$ .

Ион хромата  $CrO_4^{2-}$  имеет тетраэдрическую структуру. Если ион хромата находится в свободном состоянии, то все четыре длины связей Cr-O, а также углы между ними будут одинаковыми. Поэтому этот ион в свободном состоянии имеет тетраэдрическую симметрию ( $T_d$ ).

Если ион  $CrO_4^{2-}$  находится в кристалле, то на характер колебаний атомов сильно влияет взаимодействие с окружением. В результате этого взаимодействия конфигурация иона  $CrO_4^{2-}$  может измениться, что приводит к понижению симметрии иона хромата от тетраэдрической ( $T_d$ ) к более низкой,  $C_{3v}$ ,  $C_{2v}$ ,  $C_s$ . Иногда возможны только изменения размера, а не конфигурации иона  $CrO_4^{2-}$ . В этом случае симметрия этого иона остается неизменной.

В работах [1-7] исследовались ИК-поглощения ряд щелочногалоидных кристаллов легированных ионами хромата и двухвалентного щелочногалоидного металла. Результаты этих исследований показывают, что комплексный ион  $CrO_4^{2-}$  входит в решетку исследованных кристаллов замещением одновалентного иона, а избыточный отрицательный заряд примесного иона хромата может быть



компенсирован анионной вакансией  $Va^+$ , либо ионом двухвалентного щелочноземельного металла  $Me^{2+}$ , присутствующего в кристалле в качестве загрязнения, либо введенного преднамеренно в зависимости от способа компенсации заряда в кристалле создаются центры различных типов симметрии:

1. Если ион  $CrO_4^{2-}$  встраивается в решетку кристаллов гадолинидов калия занимая положения аниона, причем таким образом, что связи  $Cr-O$  направлены вдоль диагоналей кубической ячейки, а компенсирующий заряд расположен не в непосредственной близости от иона  $CrO_4^{2-}$ , то он находится в кристаллическом окружении и сохраняет свою симметрию  $T_d$ .

2. В случае расположения вакансии по соседству в направлении  $[110]$  создаются комплексы  $CrO_4^{2-}-Va^+$ , в которых ион  $CrO_4^{2-}$  имеет симметрию  $C_3$ .

3. Если заряд компенсируется ионом  $Me^{2+}$ , заместившим ион  $K^+$  в первой координационной сфере, создаются комплексы  $CrO_4^{2-}-Me^{2+}$ , в которых ион хромата имеет симметрию  $C_{2v}$ .

4. При расположении  $Me^{2+}$  на месте  $K^+$  во второй координационной сфере создаются комплексы, в которых симметрия снижена до  $C_{3v}$ , но создание их энергетически менее выгодно.

Литературные данные [1] показывают, что трижды вырожденная  $\nu_3$  расщепляется на три колебания в случае когда локальная симметрия иона хромата  $C_s$  или  $C_{2v}$ . Если локальная симметрия ионов хромата понижается до  $C_{3v}$  то мода  $\nu_3$  расщепляется на две колебания.

Измеренные нами ИК - поглощения примесных кристаллов  $KCl: CrO_4^{2-}, Eu^{2+}$  показывают, что в области асимметричного валентного колебания иона хромата вместе одной полосы, которая должна быть в случае симметрии  $T_d$ , наблюдается ряд полос, что свидетельствует не только о понижении симметрии иона хромата но и о наличии в кристалле центров нескольких типов симметрии.

Интенсивные полосы при  $887,921$  и  $938$   $cm^{-1}$  наблюдается только в спектре примесных кристаллов содержащих ионы хромата и европия. Поэтому можно сделать вывод о том, что эти интенсивные полосы поглощения обусловлены колебаниями ионов хромата избыточный

отрицательный заряд которых компенсирован ионами двухвалентной европия, заместившей соседний катион в первой координационной сфере, т.е. центрами  $\text{CrO}_4^{2-}\text{-Eu}^{2+}$  имеющими симметрию  $C_{2v}$ . Такой вывод напрашивается еще тем, что положения указанных интенсивных полос близки к полосам поглощения центров  $\text{CrO}_4^{2-}\text{-Ca}^{2+}$  ( $C_{2v}$ ) в других кристаллах [1-7].

При закаливании исследованных кристаллов от  $650^\circ\text{C}$  до комнатной температуры на воздухе в спектре ИК-поглощения образцов наблюдается усиление полос при  $905\text{ см}^{-1}$  и ослабление других полос.

Количество ионов хромата с симметрией  $T_d$  может быть существенно увеличено закалкой образца за счет уменьшения количества ионов, находящихся в комплексах [1,7]. Поэтому логично утверждать, что слабая полоса при  $905\text{ см}^{-1}$  обусловлены изолированными ионами хромата.

Изучение температурных зависимостей ИК-спектров образцов показало, что при нагревании полосы при  $905\text{ см}^{-1}$  усиливается за счет ослабления интенсивности других линий.

Такое поведение полос поглощения можно объяснить следующим образом. При нагревании ионы хромата и европия начинают интенсивно колебаться около положения равновесия. При достижении определенной температуры связи между ними рвется. Чем больше центров разлагаются на ионы хромата и европия, тем меньше становится концентрация центров  $\text{CrO}_4^{2-}\text{-Eu}^{2+}$ . В результате усиливается интенсивность полосы поглощения  $\text{CrO}_4^{2-}$  с симметрией  $T_d$ .

Таким образом, анализ полученных экспериментальных данных показывает, что интенсивные полосы при  $877$ ,  $921$  и  $938\text{ см}^{-1}$  обусловлены центрами  $\text{CrO}_4^{2-}\text{-Eu}^{2+}$  с локальной симметрией  $C_{2v}$ . Слабая полоса при  $905\text{ см}^{-1}$  интенсивность которого усиливается при нагревании образцов, обусловлен ионами  $\text{CrO}_4^{2-}$  с симметрией  $T_d$ . За полосы расположенные при  $850$  и  $890\text{ см}^{-1}$  ответственен комплекс  $\text{CrO}_4^{2-}\text{-Va}^+$  симметрия которого  $C_s$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Iain S.S., Warriar A.V., Acarval S.K. Vibrational and electronic spectra of Alkali halides doped with  $\text{CrO}_4^{2-}$  ions.// I.Phys.and.Chem.Sol.-1973.-V.34.-N°2-P.209-215.

2. Мирлин Д.Н., Решина И.И. Образование комплексов из двухвалентных анионных и катионных примесей в кристаллах KCl. // физ.тв.тела. 1968.- Т.10.-Вып.4.-с.1129-1135
3. Бережинский Н.И., Круликовский Б.К., Береза В.Ф. ИК- поглощение ионов  $\text{CrO}_4^{2-}$ -внедренных в кристаллы KBr. // Укр.физ.журнал.-1971- Т.16-№2.-с.261-265.
4. Демьяненко В.П., Цяшеко Ю.П., Верлан Э.М. ИК- поглощение примесного иона  $\text{CrO}_4^{2-}$ - в кристаллах KCl и KBr.// физ.тв.тела. 1970.- Т.12.-Вып.2.-с545-552.
5. Демьяненко В.П., Цяшеко Ю.П., Верлан Э.М. ИК- поглощение комплексов  $\text{CrO}_4^{2-} \cdot \text{Me}^{2+}$  в кристаллах KCl и KBr.//физ.тв.тела.1970.-Т.12.- Вып.11.-с3124-3132.
6. Белый М.У., Кушниренко И.Я., Первак Ю.А., Пенцак Г.М., Максимович Х.К. Спектроскопические свойства кристаллов KCl и KBr с примесью анионов  $\text{CrO}_4^{2-}$ ,  $\text{MoO}_4^{2-}$ ,  $\text{MnO}_4^{2-}$  и  $\text{ReO}_4^-$ . // Изв.АН.СССР,сер.физич.-1976- Т.40.-№ 9-с1930-1933.
7. A.A Alybakov, R.T Aitmatoba, Sh. Akchalov, N. Toichiev. Infrared Absorption spectra of chromate ions in RbCl Singl Crystals.// Cryst.Res.Technol.-1986.-V21.№1.K10-k12.

## Физика

УДК 533.6

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ ОБРАЗОВАНИЯ РЕЗА ПРИ ПЛАЗМЕННОЙ РЕЗКЕ МЕТАЛЛОВ

А. Ж. Жайнаков, Г. Д. Кабаева

Исследование механизмов образования реза представляет практический интерес с позиции оптимизации режимов резки различных материалов плазменной дугой. В процессе плазменной резки металлов происходит локальное проплавление и удаление металла в узкой зоне направленного теплового и силового воздействия плазменной дуги. Скорость плавления и скорость удаления расплава из полости реза зависят как от параметров режима резки, так и от теплофизических свойств разрезаемого металла [1]. Формирование полости реза определяется тепловыми процессами плавления металла, передачи тепла в жидком и твердом металле и характером течения расплава вдоль фронтальной поверхности резания [1,2]. Схема процесса плазменной резки представлена на рис 1.

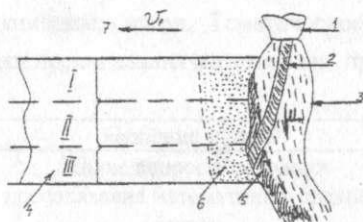


Рис.1. Схема процесса плазменной резки:

1 - плазматрон; 2 - столб дуги; 3 - плазменный поток; 4 - разрезаемый образец металла; 5 - расплавленный слой металла; 6 - зона термического влияния в металле; 7 - направление резки;  $u$  - скорость течения плазменного потока (1,5 км/с);  $v$  - скорость резки.

В результате перемещения плазменнодугового потока с определенной скоростью  $V_p$  - в направлении резки в металле образуется сквозной прорез.



Тепловой поток на различных участках фронта оплавления по высоте реза, или по толщине металла, распределен неравномерно из-за возникающего вдоль оси плазменного потока градиента температуры. Контур фронта плавления металла может быть разделен на три участка по его толщине [1]. В верхнем первом участке (I) плавление осуществляется за счет энергии поступающей из столба дуги. Второй средний участок (II) является основной областью распространения пятна дуги на металле. Плавление на этом участке происходит за счет энергии столба дуги и энергии пятна. На нижнем участке (III) плавление осуществляется в основном за счет плазменного потока. Появление покатости формы на третьем участке объясняется уменьшением плотности теплового потока в металле.

Течение расплавленного металла в каждом из участков имеет различный характер и в конечном счете, влияет на формирование реза. Согласно данным приведенным в работе [2], в верхней части реза жидкий металл течет в основном вдоль фронта реза, во второй части - течение сильно смещается к боковым поверхностям, и в третьей части - течение направлено вдоль фронта реза и к боковым поверхностям. Совокупность всех физических явлений в полости реза при плазменной резке имеет многообразную и сложную природу и модельное представление механизма образования реза является исключительно сложной задачей, т.к. следует рассматривать взаимосвязь тепловых, гидродинамических, электрических и газокинетических процессов.

Попытки модельного представления во всех известных исследованиях по плазменной резке ограничивались рассмотрением лишь отдельных сторон процесса, например, решением задачи о распространении теплового потока в металле или определением толщины слоя расплава в полости реза и протяженности зоны термического влияния [1,2]. Взаимосвязь тепловых и гидродинамических процессов была рассмотрена в математической модели для кислородной резки в работе [3], где аналитическое решение уравнений непрерывности массы, движения и теплопроводности в одномерной упрощенной постановке позволило получить уравнение связывающее скорость резки, толщину расплава и скорость перемещения расплава. Но решение подобной задачи

без учета скорости плавления металла не дает возможности установить закономерности влияния процесса теплопередачи в металле на скорость резки и толщину расплавленного слоя, в зависимости от параметров источника энергии. Математическая модель, в которой учитываются термогидродинамические условия образования реза при плазменной резке была разработана в работе [4]. Объектами исследования являлись расплавленный слой металла и граничащий с ним участок твердого металла фронтальной поверхности реза, ограниченный изотермами плавления и начала структурных изменений (зона термического влияния). Оценка интенсивности влияния рассматриваемых факторов на процессы определяющие формирование реза, позволила существенно упростить реализацию модельного представления механизма образования реза и определить термогидродинамические условия как основные факторы процесса.

В настоящей работе на основе разработанной модели проводили расчет скорости течения жидкого металла в полости реза протяженности зоны термического влияния и скорости плавления в зависимости от толщины расплавленного слоя, теплофизических свойств металла и параметров линейного источника энергии.

Решение систем уравнений проводился методом сеток, причем вводились две автономные разностные сетки, полученную систему разностных уравнений решали методом прогонок.

Полученные результаты позволяют утверждать, что изменения толщины расплавленного слоя металла могут определять картину протекания процесса резки в целом.

На рис.2 показано распределения температуры по толщине расплавленного слоя и в зоне термического влияния, в различных сечениях по толщине разрезаемого металла. По мере удаления от верхнего сечения толщина расплава увеличивается, что приводит к уменьшению скорости плавления в этом сечении, и таким образом здесь возникает отставание в проплавлении. Распределение скорости течения по толщине расплава в верхнем и нижнем сечении определяют характер удаления расплава из полости реза (рис.3)

При расчетах были использованы справочные данные для сталей марки СТ.3 и СТ.20. В качестве параметров источника нагрева и внешнего потока были использованы литературные данные по экспериментальным работам по плазменной резке.

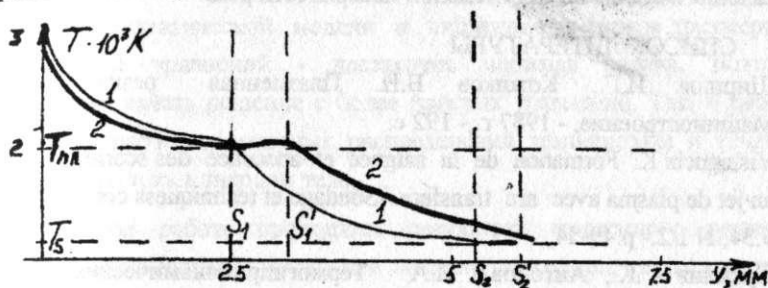


Рис.2 Распределение температуры по толщине расплава ( $0 < y < s$ ) и в зоне термического влияния ( $s < y < s$ ) в верхнем - 1 и нижнем - 2 сечении.  $S_1, S'_1$  - координаты межфазной границы и начала структурных изменений в металле для верхнего сечения;  $S_2, S'_2$  - координаты межфазной границы и начала структурных изменений в металле для нижнего сечения;  $T_{пл}$  - температура плавления;  $T_s$  - температура начала структурных превращений в металле;

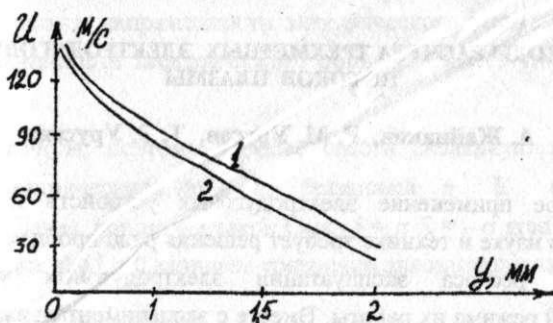


Рис.3 Скорость течения расплава по его толщине в верхнем сечении - 1 и в нижнем сечении - 2.

Выводы:

1. Математическая модель термогидродинамических условий образования реза при плазменной резке может быть реализована на

основе решения сопряженной задачи теплообмена, состоящий из двух автономных краевых задач.

2. Результаты численного анализа позволяют определить влияние толщины и скорости течения расплавленного слоя металла на скорость плавления металла по фронтальной поверхности реза.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширшов И.Г., Кожиков В.Н. Плазменная резка. - Л.: Машиностроение, - 1987 г., - 192 с.
2. Vishiguchi K. Formation de la saignee et ahecence des scories en coupage au jet de plasma avec arc transfere. //Soudage et techniques connexes. 1980, - v.34, N 1/2. - p.49-54.
3. Сухинин Г.К., Антонов И.А. Термогидродинамические условия процесса кислородной резки. //Сварочное производство - 1976. №10 - с. 8-10.
4. Кабаева Г.Д. Повышение эффективности плазменной резки путем интенсификации теплообмена в полости реза: Дисс.канд.тех.наук 05.03.06. - Москва, 1993, 136 с.

УДК 533.6

#### ~~МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТРЕХМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОДУГОВЫХ ПОТОКОВ ПЛАЗМЫ~~

~~А. Жайнаков, Р. М. Урусов, Т. Э. Урусова~~

~~Широкое применение электродуговых устройств и плазменных технологий в науке и технике требует решения ряда проблем, связанных с увеличением ресурса эксплуатации электродуговых устройств оптимизацией режима их работы. Вместе с экспериментальными методами исследования физических процессов, большое значение имеют теоретические методы, в частности, математическое моделирование и численный эксперимент. В настоящее время для численного расчета характеристик электродуговых устройств широко используются математические модели, основанные на решении двумерной системы МЭП~~



## МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТРЕХМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОДУГОВЫХ ПОТОКОВ ПЛАЗМЫ

А. Жайнаков, Р. М. Урусов, Т. Э. Урусова

Широкое применение электродуговых устройств и плазменных технологий в науке и технике требует решения ряда проблем, связанных с увеличением ресурса эксплуатации электродуговых устройств и оптимизацией режима их работы. Вместе с экспериментальными методами исследования физических процессов, большое значение имеют теоретические методы, в частности, математическое моделирование и численный эксперимент. В настоящее время для численного расчета характеристик электродуговых устройств широко используются математические модели, основанные на решении двумерной системы МГД

уравнений [1]. Данные модели дают возможность рассчитать осевые симметричные электродуговые потоки. Однако во многих конструкциях плазматронов имеют место потоки плазмы, для которых условие осевой симметрии не выполняется, и расчет характеристик таких потоков необходимо проводить на основе трехмерной системы уравнений. Разработка математической модели и численное решение трехмерной системы МГД уравнений - достаточно сложная задача, поэтому целесообразно начать решение с более простых уравнений. Так, в работе [2] выполнен расчет трехмерных распределений температуры и течения электрического тока в твердом теле.

В данной работе приводятся результаты численного решения трехмерных стационарных уравнений энергии, движения, неразрывности, потенциала электрического поля для потока аргоновой электродуговой плазмы атмосферного давления. Расчет проводится в декартовой системе координат  $X, Y, Z$ . Уравнение энергии имеет следующий вид:

$$\operatorname{div}(\rho \cdot c_p \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{T}) = \operatorname{div}(\lambda / c_p \cdot \operatorname{grad} T) + \sigma \cdot E^2 - \psi \quad (1)$$

где  $\rho, c_p, \lambda, \sigma, \psi$  - коэффициенты плотности, теплоемкости при постоянном давлении, теплопроводности, электропроводности, излучения как функции температуры.  $T, \mathbf{U}(u, v, w), \mathbf{E}(E_x, E_y, E_z)$  - температура, векторы скорости и напряженности электрического поля соответственно. Вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  имеет три компоненты, что

усложняет расчеты, поэтому удобнее ввести скалярную переменную - потенциал электрического поля  $\phi$ , связанный с  $\mathbf{E}$  соотношением  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi$ . Далее, используя закон Ома  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \operatorname{grad} \phi$  и условие сохранения тока  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$  запишем уравнение для потенциала:

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} \phi) = 0; \quad (2)$$

Уравнения количества движения для трех компонент скорости  $u, v, w$  и уравнение неразрывности соответственно имеют вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\rho \mathbf{U} u) &= \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) - dp/dx + B_x + g_x; \\ \operatorname{div}(\rho \mathbf{U} v) &= \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} v) - dp/dy - B_y + g_y; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(\rho U w) = \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} w) - dp/dz + B_x + g_x;$$

$$\operatorname{div}(\rho U) = 0;$$

где  $\mu$  - коэффициент вязкости,  $p$  - давление,  $B_x, B_y, B_z$  - составляющие магнитных сил ( в данных расчетах не учитываются );  $g_x, g_y, g_z$  - дополнительные к  $\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} U)$  вязкие слагаемые. Решение дифференциальных уравнений (1-3) проводится методом дискретизации / 3 /, суть которого состоит в следующем. Производные от неизвестных величин заменяются конечными разностями, т.е. непрерывные значения функции заменяются дискретными значениями в конечном числе точек называемых узловыми точками расчетной области. Саму расчетную область разбивают на конечное число непересекающихся контрольных объемов таким образом, что каждая узловая точка находится в одном контрольном объеме. Затем проводится трехкратное интегрирование дифференциального уравнения по контрольному объему. В результате получают дискретный аналог дифференциального уравнения, в который входят значения неизвестной функции в нескольких узловых точках. Таким образом, дифференциальное уравнение второго порядка сводится к системе линейных алгебраических уравнений, которые затем решаются итерационным методом. Алгоритм решения системы уравнений (1-3) составлен в соответствии с методикой / 3 /. На рис.1. представлена схема расчетной области, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда.

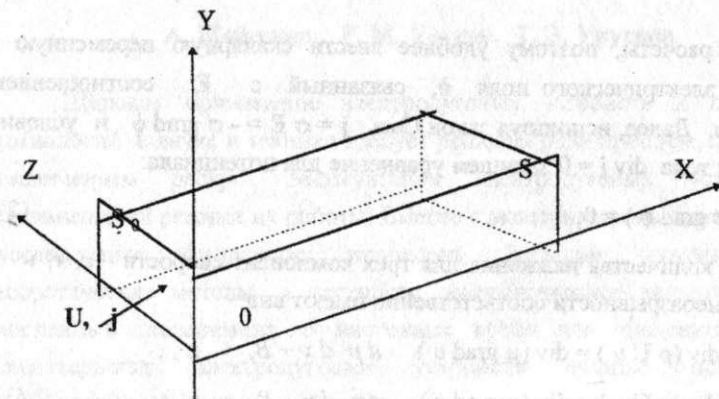


Рис. 1. Схема расчетной области.

При задании граничных условий полагается, что электрический ток втекает и вытекает по нормали к поверхностям  $S_0$  и  $S$ ; температура на этих поверхностях определяется из условия  $dT/dx = 0$ ; распределение скорости  $u$  берется из эксперимента /4/,  $v, w$  равны нулю; на боковой поверхности температура равна температуре окружающей среды, а течение тока и газа отсутствуют; давление полагалась равным произвольной константе; так как в дискретных аналогах фигурирует разность давлений, то это предположение не оказывает существенного влияния на расчеты. Коэффициенты переноса аргона взяты из работы /1/. На рис.2. приведены распределения температуры  $T(X, 15, 15)$ ,  $T(15, Y, 15)$  и скорости  $u(X, 15, 15)$ ,  $u(15, Y, 15)$ . Расчет проведен для аргоновой плазмы при токе 75 А в канале квадратного сечения размерами  $X = Y = Z = 30$  мм.

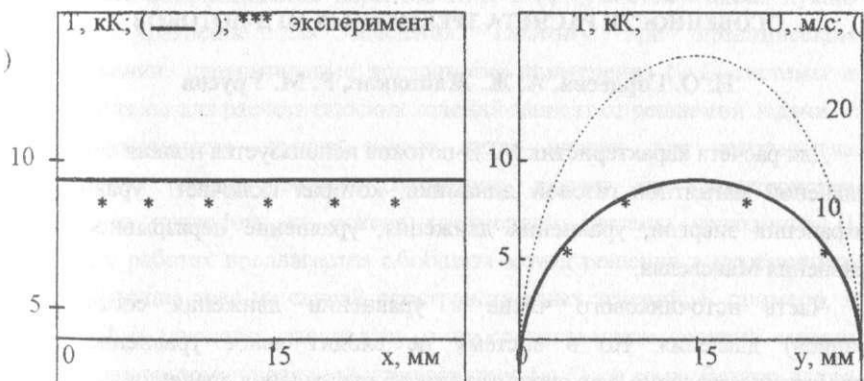


Рис.4. Распределения температуры  $T$  и скорости  $u$ .

Как следует из результатов расчета, используемый метод решения дифференциальных уравнений обеспечивает получение устойчивого, сходящегося итерационного процесса. Результаты расчета удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными /4/.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Электрическая дуга - генератор термической плазмы. Жайнаков А. и др. - Бишкек, Илим, 1991.
2. Численное решение трехмерного уравнения теплопроводности. Жайнаков А., Урусова Т.Э. - Вестник КГПУ, вып.1, ч.2. Бишкек, 1996.
3. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. Патанкар С. - Москва, Энергоатомиздат, 1984.
4. Асаналиев М.К., Жеенбаев Ж.Ж. и др. Измерение коэффициента аэродинамического сопротивления шара в аргоновой плазме // ТВТ.- 1988.- № 3. - с. 527-534.

УДК

**НОВЫЕ ПАРАМАГНИТНЫЕ ЦЕНТРЫ В ПРИМЕСНЫХ  
КРИСТАЛЛАХ NaF:Cu**

**Н. Тойчиев, М. М. Кидибаев, Т. С. Королева, К. Мусаев**

В работах [1,2] исследованы примесные центры ионов меди в кубических и тригональных матрицах. Анализируя приведенные результаты, можно предположить, что в зависимости от способа выращивания кристалла, в решетке могут образовываться центры различной симметрии. В настоящей работе представлены результаты исследования влияния способа выращивания активированных кристаллов

фторида натрия на образование примесных центров, содержащих ионы меди.]

Исследованные кристаллы выращены в электрическом поле методом Киропулоса в воздушной атмосфере из солей NaF марки "ОСЧ". Примесь меди вводилась в шихту в виде  $\text{CuF}_2$  в количестве 0,3 мол.%. Спектры электронного парамагнитного резонанса (ЭПР) регистрировались на стандартном радиоспектрометре РЭ-1307.

В спектрах ЭПР кристаллов NaF:Cu, зарегистрированных как при комнатной температуре, так и при температуре жидкого азота, наблюдается большое число линий. Наиболее простой вид имеет спектр при ориентации  $\text{H} // (001)$ . При такой ориентации спектр состоит из нескольких групп линий. Ширина линий при комнатной и азотной температурах составляет примерно 15...20 Гс. Детальное исследование угловой зависимости положения наблюдаемых линий позволяет заключить, что линии обусловлены центрами одного типа, занимающих в решетке три магнитно не эквивалентных положения. Симметрия центра тетрагональная. Главные оси ( $g_{\parallel}$ )-центра параллельны направлениям типа (001). Ширина линий тетрагональных спектров,  $g$ -факторы и константы СТС приведены в Таблице.

Таблица

Кристалл	$g_{\parallel}$	$g_{\perp}$	$a_{\parallel}$ , Гс	$a_{\perp}$ , Гс	$\Delta H$ , Гс	Работа
NaF:Cu <sup>2+</sup>	2,434	2,081	120	45	15...20	Данная
NaF:Cu <sup>2+</sup>	2,458	2,105	-	-	100...150	[2]

Следует отметить, что сигналы ЭПР обнаруживаются только в кристаллах NaF, выращенных с добавлением примеси меди. Поэтому логично предположить, что наблюдаемые ЭПР-спектры обусловлены парамагнитными центрами, в состав которых входят ионы  $\text{Cu}^{2+}$ .

Медь в природе встречается в виде изотопов  $\text{Cu}^{63}$  и  $\text{Cu}^{65}$ . Магнитные моменты этих изотопов очень близки: ядерный спин обоих -  $J=3/2$ . В результате взаимодействия неспаренного электрона иона  $\text{Cu}^{2+}$  с этими ядрами, в спектре ЭПР должно быть четыре линии сверхтонкой структуры

(СТС). Если поблизости от иона  $\text{Cu}^{2+}$  располагается еще ядро, спин которого отличен от нуля, то в результате дополнительного взаимодействия каждая линия СТС должна дополнительно расщепляться. Вид спектров ЭПР, полученных в нашем эксперименте, соответствует этому условию.

В работе [2] в широком интервале температур исследованы спектры ЭПР ионов  $\text{Cu}^{2+}$  в кристаллах  $\text{NaF}$ , выращенных методом Бриджмена в атмосфере гелия. Показано, что симметрия центра  $\text{Cu}^{2+}$  триклинная при 1,6К, моноклинная при 4,2К и тетрагональная при  $T \geq 40\text{K}$ . Причем центры с тетрагональной симметрией устойчивы к рентгеновскому облучению. Триклинный центр состоит из иона  $\text{Cu}^{2+}$ , замещающего ион натрия, около которого расположены два дефекта: вакансия натрия в направлении (011) и одновалентный ион меди на месте иона  $\text{Na}^+$  в направлении (101). В тетрагональном центре ион  $\text{Cu}^{2+}$  находится в неизменном октаэдрическом окружении, а тетрагональное искажение обусловлено эффектом Яна-Теллера.

Для объяснения тетрагонального спектра кристалла  $\text{NaF}:\text{Cu}$ , обнаруженного в данной работе можно предложить модель, несколько отличающуюся от модели, использованной в [2]. Предположим, что ион  $\text{Cu}^{2+}$  замещает ион  $\text{Na}^+$ , а избыточный положительный заряд компенсируется катионной вакансией, расположенной вдоль направления (001). В этом случае ион  $\text{F}^-$ , расположенный между  $\text{Cu}^{2+}$  и  $v_k$  должен сместиться от своего равновесного положения в сторону центра. В результате этого ближайшее октаэдрическое окружение иона  $\text{Cu}^{2+}$  подвергается тетрагональному искажению. Следует отметить, что данная модель не исключает влияния эффекта Яна-Теллера.

Ядро иона фтора, спин которого , имеет сравнительно большой магнитный момент. Поэтому в результате взаимодействия неспаренного электрона с шестью ядрами иона фтора каждая линия СТС иона  $\text{Cu}^{2+}$  должна расщепляться на 7 компонент с распределением интенсивностей 1:6:15:20:15:6:1 [3]. Количество наблюдаемых в спектре ЭПР линий и их относительные интенсивности близки к этому теоретическому условию.

В спектре оптического поглощения облученных кристаллов фторида натрия наблюдаются полосы поглощения при 344 и 507 нм, обусловленные электронными F- и M-центрами соответственно. С увеличением дозы облучения концентрация этих центров в кристалле увеличивается. Специально проведенные исследования показали, что в кристаллах с примесью меди эффективность образования электронных центров окраски снижается по сравнению с кристаллом NaF.

Как уже отмечалось, наблюдаемые нами спектры ЭПР кристалла NaF:Cu обусловлены центрами, имеющими тетрагональную симметрию, причем в состав этих центров входит ион  $\text{Cu}^{2+}$ . Следует отметить, что спектр ЭПР тетрагонального центра исследуемого в данной работе, существенно отличается от спектра тетрагонального центра, обнаруженного в работе [2]. Это отличие проявляется в ширине линий и устойчивости спектров к рентгеновскому излучению. Исследование спектров ЭПР облученных кристаллов NaF:Cu показывает, что с увеличением дозы облучения интенсивность сигналов ЭПР сначала медленно уменьшается, а затем полностью исчезает. Такое поведение спектров ЭПР под действием рентгеновского облучения наводит на мысль о том, что исследованные нами парамагнитные центры в кристаллах NaF:Cu, выращенных в электрическом поле, по своей природе существенно отличаются от парамагнитных центров, описанных в [2], хотя в обоих случаях локальная симметрия этих центров тетрагональная. Изменение спектров ЭПР исследованных кристаллов при облучении объясняется изменением валентного состояния ионов  $\text{Cu}^{2+}$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G.Kuwabaru, Journal of the Physical Society of Japan, 31, p.1074, 1971
2. G.Maghe, H.Bill, D.Lovy. Solid.State Communication. 53, N8, p.661-664, 1985
3. Д.Вертц, Д.Болтон. Теория и практические приложения метода ЭПР. Мир, 1975.



## НУРЛАНДЫРЫЛГАН ТАТААЛ СУЛЬФАТТАРДЫН ЭПР СПЕКТРИ

Ч. Т. Ордобаев, К. Ш. Шаршеев, Р. Х. Юсупов

I. Нурландырылган  $KNaSO_4$  кристаллынын ЭПР спектри

Кристаллдардагы радиациялык жетишпегендиктерди изилдөө алардын пайда болуу механизмин билүү ар кандай фундаменталдык-прикладдык маселелерди чечүүгө өбөлгө түзөт.

Биз эритмеден өстүрүлгөн  $KNaSO_4$  кристаллын рентген нуру менен нурланткандан кийин пайда болгон парамагниттик борборлорду изилдедик. ЭПР спектрин алууда үч сантиметрдик диапазондогу РЭ-1307 радиоспектрометри колдонулду. Изилденүүчү кристаллдар вольфрам нурдануусундагы УРС-70 рентген аппараты менен 3 саат нурландырылды.

$KNaSO_4$  кристаллын өстүрүүдө турактуу температурада эритмени акырындап буулантуу ыкмасы колдонулуп, өсүү температурасына жараша эритмени составындагы  $K_2SO_4$  жана  $Na_2SO_4$  туздарынын катнашы ар кандай болушу мүмкүн экендиги эске алынды.

Биз тандап алган температурада ( $t=35^0$ ) эритмедеги туздардын катнашы  $Na_2SO_4:K_2SO_4=66,7:33,3$  болушу керек экендиги белгилүү [1]. Натыйжада гексогоналдык сингонияга тиешелүү элементардык ячейкасында  $KNaSO_4$  түн эки молекуласы жайланышкан, кристаллографиялык октору  $a_0=5,643 \text{ \AA}$  жана  $C_0=7,259 \text{ \AA}$  барабар түссүз кристаллдар алынды[2].

Комнаттык температурада тартылган  $KNaSO_4$  кристаллынын ЭПР спектри кристаллдын эркин каалагандай багытталышында 5 сызыкчадан турат. Эгерде  $KNaSO_4$  кристаллынын кристаллографиялык октору тышкы магнит талаасына жарыш жайланышса, анда ЭПР спектринин түрү бир топ жөнөкөйлөтүшөт. Кристаллографиялык C огу тышкы магнит талаасына жарыш болгондо ЭПР спектринде болгону эки сызыкча байкалат (1-сүрөт). Бул сызыкчалардын бирөө бирдей типтеги 3 сызыкчалардын  $A_1, A_2, A_3$  экинчиси эки типтеги F жана C кошулушунан турат. ЭПР сызыкчаларынын бурчтук көз карандылыгын кошулушунан турат. ЭПР сызыкчаларынын бурчтук көз карандылыгын изилдөөдө  $A_1, A_2, A_3$  - ЭПР сызыкчаларынын анзетропиясы F ЭПР сызыкчасынын анзетропиясына караганда жогору жана алардын абалынын өзгөрүүсү окшош болору аныкталды. Ал эми C сызыкчасы болсо изотроптуу.

Байкалган ЭПР спектрин эсептөө үчүн  $S=1/2$  кезиндеги пайдалануучу

$$H = g_x \beta_x H_x S_x + g_y \beta_y H_y S_y + g_z \beta_z H_z S_z \dots \quad (1)$$

спин-гамильтонияны колдондук. Бурчтук көз карандылыктарды талдоонун натыйжасында  $g$ -фактордун башка маанилери жана алардын багыттоочу косинустары аныкталды (таблица 1).

Таблица 1.

сызыкча	$g$ -фактор	Багыттоочу косинустардын маанилери		
		$a$	$a^x$	$c$
$A_1$	$g_x=2,0062$	0,4795	0,8608	0,1708
	$g_y=2,0108$	0,1107	0,0921	0,9834
	$g_z=2,0310$	0,8661	0,5006	0,0619
$A_2$	$g_x=2,0062$	0,4795	0,8608	0,1708
	$g_y=2,0108$	0,1107	0,0921	0,9834
	$g_z=2,1316$	0,8667	0,5006	0,0619
$A_3$	$g_x=2,0033$	0,9786	0,0148	0,2048
	$g_y=2,0107$	0,1679	0,1679	0,9642
	$g_z=2,0310$	0,0065	0,9857	0,1683
F	$g_x=1,9976$	1	0	0
	$g_y=1,9990$	0	1	0
	$g_z=2,0009$	0	0	1
C	$g=2,0036$	изотроптуу		

Байкалган ЭПР сызыкчаларынын бурчтук көз карандылыгынын, эсептелип чыккан  $g$ - фактордун башкы маанилерин, алардын багыттоочу косинустарын талдоодон төмөнкүдөй жыйынтык чыгарсак болот.

А сызыкчасы спектрдеги шарттуу түрдө  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  -тамгалары менен белгиленген ЭПР сызыкчалары үчүн эсептелип чыккан  $g$ -фактордун башкы маанилери өтө жакын. Болгону, бул сызыкчалар багыттоочу косинустардын маанилери менен айырмаланып турушат. Демек  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  сызыкчалары  $KN_2SO_4$  кристалын нурданткан кезде пайда болгон бир типтеги парамагниттик борборлор менен мүнөздөлүшү мүмкүн. Нурландырылган  $K_2SO_4$ ,  $Na_2SO_4$  жана  $LiKSO_4$  кристаллынын ЭПР спектрин изилдөөдө байкалган парамагниттик борборлордун ичинен  $SO_4$  - ион-радикалынын  $g$ - факторунун башкы маанилеринин чондугу, биздин учурдагы  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  сызыкчалары үчүн эсептелип чыгарылган  $g$ -фактордун башкы маанилеринин чондугуна өтө жакын(3-6).

Ошондуктан,  $A_1$ ,  $A_2$  жана  $A_3$  сызыкчалары  $KN_2SO_4$  кристаллын рентген нуру менен нурдантканда  $SO_4^{2-} \rightarrow SO_4^- + e^-$  схемасы боюнча пайда болгон  $SO_4^-$  - ион радикалы менен байланышкан деп эсептейбиз.

Спектрде байкалган F сызыкчасын анизотропиясы өтө аз, эсептелинип чыккан g- факторунун маанилеринин чондугу эркин электрондун g- факторунун чондугуна караганда ( $g=2,0023$ ) кичирээк. Адатта мындай g- фактор электрондук парамагниттик борборлорго тиешелүү болушат (7).

$KN_2SO_4$  кристаллынын ЭПР спектриндеги с- сызыкчасы өтө интенсивдүү жана ал изотроптуу g- факторго ээ. Көптөгөн нурландырылган сульфаттык кристаллдардын ЭПР спектринде изотроптуу g- факторго ээ, парамагниттик борбор болуп  $SO_3^-$ -ион-радикалы эсептелинет. Демек, биздин учурда деле с-сызыкчасы  $SO_3^-$ -ион-радикалына тиешелүү болушу керек.

## 2. Рентген нуру менен нурландырылган $LiKSO_4 \cdot Cu^{2+}$ кристаллынын ЭПР спектри

Рентген нуру менен нурландырылган таза  $LiKSO_4$  кристаллынын ЭПР спектринде  $SO_4^-$ ,  $SO_3^-$  ион радикалдарына тиешелүү ЭПР (6) сызыкчалары, ал эми  $Cu^{2+}$  иону кошулган  $LiKSO_4$  кристаллынын ЭПР спектринде  $Cu^{2+}$  ионуна тиешелүү ЭПР сызыкчалары байкалган (8).

Атайын адабияттарда кристаллдарга кошулма ион кошулгандан кийин, радиациялык аракет этүүнүн натыйжасында, ушундай эле аракеттин негизинде таза кристаллдарда пайда болгон чекиттик жетишпегендиктердин байкалаары белгиленген (7). Экинчиден, радиациялык аракет этүүнүн натыйжасында кристаллдын курамындагы кошулма иондун валенттүүлүгү өзгөрө тургандыгы бизге белгилүү. Ошондуктан  $LiKSO_4$  кристаллын рентген нуру менен нурлантканда анын курамында өздүк жетишпегендиктердин пайда болушуна кошулма  $Cu^{2+}$  иону таасир көргөзүшү күтүлөт.

Чындыгында эле, рентген нуру менен нурдантууда  $\text{Cu}^{2+}$  кошулма иону кошулган  $\text{LiKSO}_4$  кристаллынын ЭПР спектринде бир катар өзгөчөлүктөр байкалды. Биринчиден, кошулма  $\text{Cu}^{2+}$  ионуна тиешелүү ЭПР сызыкчаларынын интенсивдүүлүгү нурдантуу дозасынын өсүшү менен азаят. Экинчиден, рентген нуру менен нурландырылган  $\text{LiKSO}_4:\text{Cu}^{2+}$  кристаллынын ЭПР спектринде, рентген нуру менен нурландырылган таза жана  $\text{Cu}^{2+}$  кошулма иону кошулган  $\text{LiKSO}_4$  кристаллынын ЭПР спектринде жок жабы ЭПР сызыкчалары байкалды (2-сүрөт). Жаңы пайда болгон ЭПР сызыкчалары кристаллдын кристаллографиялык  $C$  огу тышкы магнит талаасынын багытына жарыш болгондо ачык байкалат. Келтирилген сүрөттө бул ЭПР сызыкчалары  $D_1$ ,  $D_2$  жана  $G$  тамгалары менен шарттуу түрдө белгиленип коюлду. Кристаллдын “ав”, “вс” жана “са” тегиздиктеринде тышкы магнит талаасына салыштырмалуу айлантууда алынган  $D_1$ ,  $D_2$  жана  $G$  ЭПР сызыкчаларынын бурчтук көз карандылыктарынан төмөндөгүдөй өзгөчөлүктөр байкалды:

1.  $H/C$  багытында  $D_1$  жана  $D_2$  ЭПР сызыкчалары магнит талаасындагы абалы боюнча дал келишет, ал эми  $G$  ЭПР сызыкчасы өзүнүн магнит талаасындагы абалы боюнча  $D_1$  жана  $D_2$  ЭПР сызыкчалары менен дал келишпейт. Демек, мындан  $D_1$ ,  $D_2$  жана  $G$  сызыкчалары ар башка чекиттик жетишпегендиктерге тиешелүү боло тургандыгы жөнүндө тыянак чыгарсак болот.

2.  $D$  тобуна тиешелүү ЭПР сызыкчаларынын интенсивдүүлүгү ЭПР сызыкчасынын интенсивдүүлүгүнө караганда 7 эсе чоң. Демек, чындыгында эле  $G$  ЭПР сызыкчасына  $D$  ЭПР сызыкчаларына тиешелүү болгон ион-радикалдардан айырмаланган ион-радикалдар тиешелүү жана курамында  $\text{Cu}^{2+}$  иону бар  $\text{LiKSO}_4$  кристаллын рентген нуру менен нурдантканда бул ион-радикалдардын пайда болуусу начарыраак.

3.  $G$  ЭПР сызыкчасы бардык үч “ав”, “вс” жана “са” тегиздиктеринде ажыроого ээ болбойт, ал эми  $D_1$  жана  $D_2$  тамгалары менен белгиленген ЭПР сызыкчалары “вс” жана “са”



тегиздиктеринде ар бири экиге бөлүнүп кетишет. Демек, мындан G ЭПР сызыкчасына тиешелүү ион-радикал кристаллда 1 магниттик абалга ээ, ал эми ЭПР сызыкчаларына тиешелүү ион радикал 4 магниттүү эквиваленттүү эмес абалга ээ деген жыйынтыкка келсек болот.

Тажрыйбадан алынган жыйынтыктарды колдонуп D жана G ЭПР сызыкчаларына туура келүүчү жетишпегендиктерди мүнөздөөчү g - фактордун маанилерин эсептеп чыктык (таблица 2).

Таблица 2

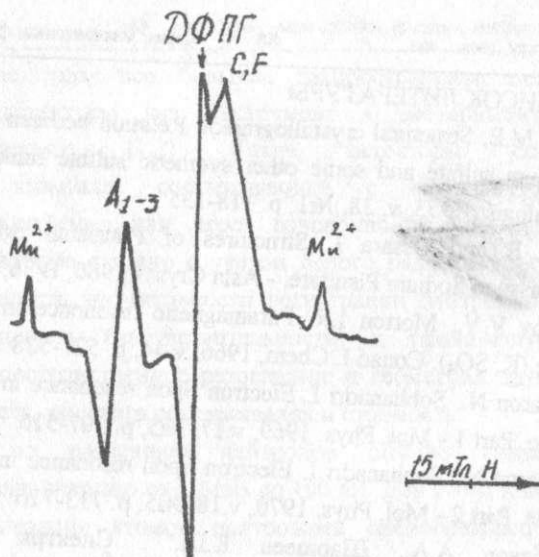
ЭПР сызыкчасы	g - фактордун мааниси	Багытоочу косинустардын маанилери		
		a	b	c
D <sub>1</sub>	g <sub>1</sub> =1,9967	± 0,6969	0,5815	0,4196
	g <sub>2</sub> =2,0126	± 0,5362	0,8324	0,1395
	g <sub>3</sub> =2,0523	± 0,4390	0,1173	0,8908
D <sub>2</sub>	g <sub>1</sub> =1,9967	± 0,4479	0,7711	0,4523
	g <sub>2</sub> =2,0126	± 0,5362	0,8324	0,1395
	g <sub>3</sub> =2,0523	± 0,2339	0,4172	0,8781
G	g <sub>1</sub> =2,0049	1	0	0
	g <sub>2</sub> =2,0162	0	1	0
	g <sub>3</sub> =2,0346	0	0	1

Таблицада келтирилген D жана G ЭПР сызыкчаларына тиешелүү ЭПР чондуктарын талдоодо биз төмөнкүдөй мүмкүнчүлүктөрдү карайбыз.

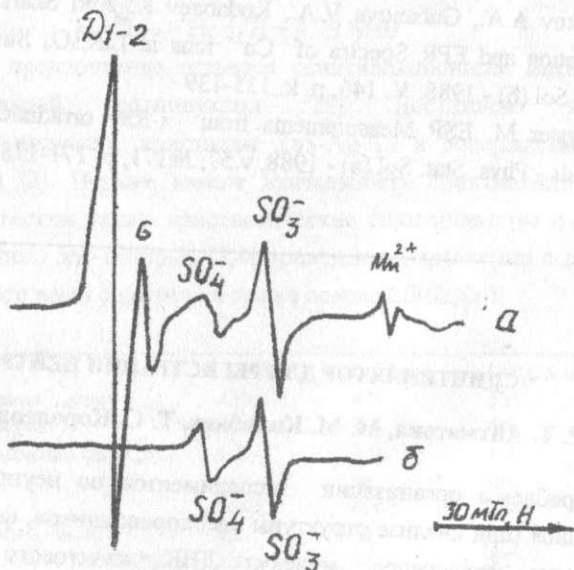
Биринчиден рентген нуру менен нурдантууда кошулма Cu<sup>2+</sup> ионуна тиешелүү ЭПР сызыкчаларынын интенсивдүүлүктөрүнүн азайышы, радиациялык аракет этүүнүн натыйжасында кристаллдагы кошулма иондун саны азая тургандыгын далилдейт. Кошулма иондун санынын өзгөрүшү радиациялык аракеттин астында кошулма иондун валенттүүлүгүнүн өзгөрүшү менен түшүндүрүлөт. Нурдантуу процессинде кошулма иондук валенттүүлүгү электронду кармап алуу менен төмөндөшү (Cu<sup>3+</sup>

→ $\text{Cu}^{2+} + h$ ) мүмкүн.  $\text{Cu}^+$  ионунун электрондук конфигурациясы  $3d^{10}$  жана анын жалпы спина  $S=0$ . Ошондуктан мындай иондор парамагниттүү эмес. Ал эми электрондук конфигурациясы  $3d^6$  болгон  $\text{Cu}^{3+}$  иону үчүн интенсивдүүлүктөрүнүн катышы болжол менен 1:3:1 болгон 3 ЭПР сызыкчасынын тобунун байкалышы мүнөздүү жана бул ЭПР сызыкчаларынын анизотропиясы магнит талаасында бир нече миз Гауска барабар болушу керек. (Биздин учурда D жана G ЭПР сызыкчаларынын анизотропиясы 100 Гс тан ашпайт).

Экинчиден, D жана G жетишпегендиктери  $\text{SO}_4^-$ ,  $\text{SO}_3^-$ ,  $\text{SO}_2^-$  ион радикалдары болушу мүмкүн эмес, себеби бул ион-радикалдарга тиешелүү ЭПР сызыкчалары магнит талаасындагы абалы боюнча жана g - факторлорунун маанилери боюнча D жана G сызыкчаларынан айырмаланып турушат. Демек,  $\text{Cu}^{2+}$  кошумча иону кошулган  $\text{LiKSO}_4$  кристаллын нурдантканда пайда болгон D жана G сызыкчаларынын g - факторун талдаган кезде биз төмөнкүдөй жыйынтыкка келебиз. Бул сызыкчалардын g - факторунун маанилери жездин ар кандай валенттүүлүктөгү иондорунун g - факторуна караганда  $\text{SO}_4^-$  ион-радикалынын g - факторунун маанисине жакыныраак. Ошондуктан D жана G сызыкчалары  $\text{O}_4^-$  ион-радикалына тиешелүү болбосо да, ушул ион-радикалдын кристаллдагы башка бир жетишпегендиктер менен болгон жыйындысына тиешелүү болушу мүмкүн. Мындай жыйындыны түзүүчү жетишпегендик болуп,  $\text{LiKSO}_4$  кристаллына  $\text{Cu}^{2+}$  ионун кошкон кезде кристаллдын составында пайда болуучу Li жана K ионунун вакансиясы эсептелинет. Демек, D жана G ЭПР сызыкчалары  $V_{II}-\text{SO}_4^-$  жана  $V_I-\text{SO}_4^-$  комплекстери болушу мүмкүн. Мындай комплекстердин пайда болушу башка сульфаттык кристаллдарга мурда кезиккен болуучу (9).



1-сүрөт. Нурландырылган  $KNaSO_4$  кристаллынын ЭПР спектри Н//С.  $T=300 \text{ K}$ .



2-сүрөт. Нурландырылган  $KLiSO_4$  кристаллынын ЭПР спектри  
 а)  $Cu^{2+}$  кошулмасы кошулган  $KLiSO_4$  кристаллы Н//С  $T=30$   
 б) Таза  $KLiSO_4$  кристаллы Н//С  $T=300 \text{ K}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Holmy M.E. Structural crystallographic Relation between Sodrum sertfete and Potassium sulfate and some other synthetic sulfate minerals. The American Mineralogist, 1953, v. 38, №1, p. 118-135
2. Okada R and Ossara I. Structures of Potassium Sodium Sulphote and Tripotassium Sodium Pisulfate, - Asta Cryst - 1980, B 36, p. 919-921
3. Gromov V.V., Morton I.R. Paramagnetic resonance in irradiated potassium sulfate ( $K_2SO_4$ ). Conad I. Chem, 1966, v.44, p. 527-528
4. Hasiharon N., Sobhanadri I. Electron Spon resonance in  $\alpha$ -irradiated Sodium Sulfate. Part 1 - Mol. Phys. 1969, v.17, №5, p. 507-516
5. Hasiharon N., Sobhanadri I. Electron Spon resonance in  $\alpha$ -irradiated Sodium Sulfate. Part 2 - Mol. Phys. 1970, v.18, №5, p. 713-716
6. Алыбаков А.А., Шаршеев К.Ш. Спектры ЭПР облученных монокристаллов  $LiKSO_4$ . Изв. АН Кирг. ССР., 1981, №3, с.31-34
7. Марфунин А.С., Введение физику минералов - М.: Недра 1974, 324 с.
8. Alybakov A.A., Gubanova V.A., Kudabaev K. And Sharsheev K. Optical Absorption and EPR Spectra of  $Cu^{2+}$  ions in  $LiKSO_4$  Singl Crystals. Phys Status Sol (b) - 1988. V. 146, p. k. 135-139
9. M.Kryster M. ESP Measurements from  $\alpha$ -Ray orradiated  $BaSO_4$  Single Crystals - Phys. Stat. Sol (a) - 1988, v.57, №171, p. 171-178

**Математика**

УДК 515.12

**О КЛАССИФИКАЦИИ ПОЛНЫХ РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ  
ОТОБРАЖЕНИЙ****А. А. Борубаев, А. А. Чекеев**

Индекс полноты равномерных пространств был введен А.А.Борубаевым ([1]). Им же исследованы многие свойства индекса полноты равномерных пространств и дана классификация степени полноты равномерных пространств. В данной работе вводится индекс полноты для равномерно непрерывных отображений и исследуются различные его свойства. В частности, обобщается известный результат К.Мориты ([4]) и усиливаются результаты М.Чобана ([5]).

Всюду ниже мы будем пользоваться обозначениями и терминологией из книг [2] и [3].

**1. Определение.** Направленность  $\{x_a : a \in M\}$  называется  $N$ -направленностью Коши, если найдется такая система равномерных покрытий  $N \subset U$ , что для любого  $a \in N$  существуют такие  $A \in a$  и  $b \in M$ , что  $x_a \in A$  для всех  $a \geq b$ .

**2. Определение.** Равномерно непрерывное отображение  $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$  равномерного пространства  $(X, U)$  в равномерное пространство  $(Y, V)$  называется  $N$ -полным, если для любой  $N$ -направленности Коши  $\{x_a : a \in M\}$  из сходимости направленности  $\{f(x_a) : a \in M\}$  следует сходимость самой направленности  $\{x_a : a \in M\}$ .

Ниже мы приведем определения  $N$ -полноты равномерно непрерывных отображений, эквивалентные определениям 1 и 2, в терминах фильтров. Эту эквивалентность не составляет труда доказать, по этой причине мы ее доказательство опускаем.

**3. Определение.** Фильтр  $F$  в равномерном пространстве  $(X, U)$  называется  $N$ -фильтром Коши, если найдется такая система равномерных покрытий  $N \subset U$ , что  $\alpha \cap F \neq \emptyset$  для всех  $\alpha \in N$ .



**4. Определение.** Равномерно непрерывное отображение  $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$  равномерного пространства  $(X, U)$  в равномерное пространство  $(Y, V)$  называется  $H$ -полным, если для любого  $H$ -фильтра Коши  $F$  в равномерном пространстве  $(X, U)$ , из того  $\bigcap \{ \overline{f(F)} : F \in F \} \neq \emptyset$ , следует  $\bigcap \{ \overline{F} : F \in F \} \neq \emptyset$ .

Ниже, исходя из потребностей, мы будем пользоваться обоими определениями  $H$ -полноты равномерно непрерывных отображений.

**5. Определение.** Через  $ic(f)$  обозначим индекс полноты равномерно непрерывного отображения  $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$  равномерного пространства  $(X, U)$  в равномерное пространство  $(Y, V)$  и определим его следующим образом:  $ic(f) = \min\{\tau: f - H\text{-полно и } |H| \leq \tau\}$ .

Известно ([2], [3]), что всякое равномерное пространство  $(X, U)$  определяет равномерное пространство  $(exp_c X, exp_c U)$ , элементами которого являются все непустые компакты из  $X$ , а равномерность  $exp_c U$  называется **равномерностью Хаусдорфа** и определяется следующим образом: для любого  $\alpha \in U$  и любой конечной подсистемы  $\alpha' \subseteq \alpha$  полагают  $\langle \alpha' \rangle = \{K \in exp_c X: K \subset U\alpha' \text{ и } K \cap A \neq \emptyset \text{ для любого } A \in \alpha'\}$ . Система  $\langle \alpha \rangle = \{\langle \alpha' \rangle: \alpha' \subset \alpha \text{ и } |\alpha'| < \aleph_0\}$  является покрытием множества  $exp_c X$ , а множество  $\{\langle \alpha \rangle: \alpha \in U\}$  является базой равномерности  $exp_c U$ .

Для каждого равномерно непрерывного отображения  $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$  определено равномерно непрерывное отображение  $exp_c f: (exp_c X, exp_c U) \rightarrow (exp_c Y, exp_c V)$ , которое каждому компакту  $K \in exp_c X$  сопоставляет компакт  $f(K) \in exp_c Y$ , т.е.  $exp_c f(K) = f(K)$  ([2], [3]).

Не составляет труда доказать следующее

**1. Предложение.** Пусть  $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$  - равномерно непрерывное отображение равномерного пространства  $(X, U)$  в равномерное пространство  $(Y, V)$ ,  $A \subset X$  - замкнутое подпространство. Тогда  $ic(f) = ic(f|_A)$ .

**1. Теорема.**  $ic(f) = ic(exp_c f)$ .

**Доказательство.** Так как  $X$  - замкнутое подпространство  $\exp_c X$  и  $\exp_c f|_X = f$  ([2], [3]) и из предложения 1 следует выполнение неравенства  $id(f) \leq id(\exp_c f)$ .

Докажем теперь обратное неравенство. Пусть  $\{K_a : a \in M\}$  - произвольная  $\exp_c N \subset \exp_c U$  направленность Коши в равномерном пространстве  $(\exp_c X, \exp_c U)$  такая, что  $\{\exp_c f(K_a) = f(K_a) : a \in M\}$  сходится в равномерном пространстве  $(\exp_c Y, \exp_c V)$  к некоторому компактному  $N \in \exp_c Y$ . Не ограничивая общности, можно считать, что каждое равномерное покрытие из системы  $\exp_c N$  является базовым, т.е.  $\exp_c N = \{\langle \alpha \rangle : \alpha \in N, N \subset U\}$ . По условию для любого  $\alpha \in N$  существуют  $b \in M$  и конечная подсистема  $\alpha' \subseteq \alpha$  такие, что  $K_a \in \langle \alpha' \rangle$  для всех  $a \geq b$ .

Другими словами,  $K_a \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$  и  $K_a \cap A_i \neq \emptyset$ ,  $A_i \in \alpha$  и  $i = 1, 2, \dots, n$ . Для каждого  $b \in M$  положим  $F_b = \bigcup \{K_a : a \geq b\}$  и пусть  $\xi = \{F \subset X : \text{существует } b \in M, F_b \subset F\}$ . Ясно, что  $\xi$  является фильтром. Через  $F$  обозначим ультрафильтр, содержащий фильтр  $\xi$ . Тогда, по построению фильтра  $\xi$ , имеем  $\alpha \cap F \neq \emptyset$  для всех  $\alpha \in N$ . Тем самым  $F$  является  $N$ -фильтром Коши в равномерном пространстве  $(X, U)$ . Из построения фильтра  $\xi$  следует, что  $\bigcap \{\overline{f(F)} : F \in \xi\} = N$  ([2]) и тем более  $\bigcap \{\overline{f(\Phi)} : \Phi \in F\} \cap N \neq \emptyset$ . Для отображения  $id(f) \leq |N|$ , следовательно,  $\bigcap \{\overline{\Phi} : \Phi \in F\} = M \neq \emptyset$ . Согласно предложению 1,  $id(f|_M) \leq id(f)$ .

Пусть  $\Theta$  - произвольный ультрафильтр в равномерном пространстве  $(M, U|_M)$ . По построению ультрафильтра  $F$ , для каждого  $\alpha \in N$  найдутся  $A_1, A_2, \dots, A_n$  из  $\alpha$  такие, что  $\bigcup_{i=1}^n A_i \in F$  и  $M \cap A_i \neq \emptyset$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ . Следовательно, для любого  $\alpha \in N$  найдется такое  $A \in \alpha$ , что  $M \cap A \in \Theta$ . Итак,  $\Theta - N|_M$ -фильтр Коши, где  $N|_M = \{\alpha \wedge N : \alpha \in N\}$ . Так как  $N$  - компактно и  $id(f|_M) \leq id(f)$ , то выполняется  $\bigcap \{\overline{T} : T \in \Theta\} \neq \emptyset$  из условия  $\bigcap \{\overline{f|_M(T)} : T \in \Theta\} \neq \emptyset$ . Итак,  $M$  - компакт. Теперь, применяя технику книги [2],

нетрудно доказать, что направленность  $\{K_\alpha, \alpha \in M\}$  сходится к  $K$  в равномерном пространстве  $(\exp_c X, \exp_c U)$ , следовательно,  $ic(f) \geq ic(\exp_c f)$ .

**1. Следствие ([2]).**  $ic(U) = ic(\exp_c U)$ .

**6. Определение.** Равномерно непрерывное отображение  $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$  равномерного пространства  $(X, U)$  в равномерное пространство  $(Y, V)$ , для которого  $ic(f) \leq N_0$ , называется **равномерно полным по Чеху**.

**2. Следствие.** Равномерно непрерывное отображение  $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$  равномерного пространства  $(X, U)$  в равномерное пространство  $(Y, V)$  равномерно полно по Чеху в том и только том случае, когда таковым является отображение  $\exp_c f: (\exp_c X, \exp_c U) \rightarrow (\exp_c Y, \exp_c V)$ .

**3. Следствие ([2]).** Равномерное пространство  $(X, U)$  равномерно полно по Чеху тогда и только тогда, когда равномерно полно по Чеху равномерное пространство  $(\exp_c X, \exp_c U)$ .

**4. Следствие.** Равномерно непрерывное отображение  $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$  равномерного пространства  $(X, U)$  в равномерное пространство  $(Y, V)$  полно в том и только том случае, когда таковым является отображение  $\exp_c f: (\exp_c X, \exp_c U) \rightarrow (\exp_c Y, \exp_c V)$ .

**5. Следствие ([4]).** Равномерное пространство  $(X, U)$  полно тогда и только тогда, когда полно равномерное пространство  $(\exp_c X, \exp_c U)$ .

**6. Следствие.** Отображения  $\exp_c \tilde{f}$  и  $\exp_c \tilde{f}$  равномерно изоморфны.

Доказательство следует из следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} (\exp_c X, \exp_c U) & & \\ \tilde{\tau} \downarrow & & (\exp_c Y, \exp_c V), \\ (\exp_c \tilde{X}, \exp_c \tilde{U}) & & \end{array}$$

где  $\tilde{\tau}$  есть продолжение естественного вложения  $i: (\exp_c X, \exp_c U) \rightarrow (\exp_c \tilde{X}, \exp_c \tilde{U})$  такого, что  $\exp_c f = \exp_c \tilde{f} \circ \tilde{\tau}$ . Тогда отображение  $\exp_c \tilde{f}$  естественно изоморфно отображению  $\exp_c \tilde{f}$ , в силу единственности пополнения равномерно непрерывных отображений.

С помощью этого следствия можно доказать усиленный вариант одной теоремы М. Чобана ([5]).

**2. Теорема.** Равномерно непрерывное отображение  $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$  равномерного пространства  $(X, U)$  в равномерное пространство  $(Y, V)$  равномерно совершенно тогда и только тогда, когда равномерно совершенно отображение  $\exp_c f: (\exp_c X, \exp_c U) \rightarrow (\exp_c Y, \exp_c V)$ .

**Доказательство.** Равномерно непрерывное отображение  $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$  равномерно совершенно как замкнутое подотображение равномерно совершенного отображения  $\exp_c f: (\exp_c X, \exp_c U) \rightarrow (\exp_c Y, \exp_c V)$ .

Пусть теперь  $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$  - равномерно совершенное отображение. Это, в силу одного из критериев равномерной совершенности, равносильно формуле  $sf(sX \setminus X) \subseteq sY \setminus Y$ , где  $(sX, sU), (sY, sV)$  - Самюэловские компактификации равномерных пространств  $(X, U), (Y, V)$ , соответственно, а  $sf$  - продолжение отображения  $f$ .

Через  $U_p$  и  $V_p$  обозначим максимальные предкомпактные равномерности, содержащиеся в  $U$  и  $V$ , соответственно. Тогда имеем следующие вложения:

$$\begin{aligned} \exp_c U_p &\subset (\exp_c U)_p \subset \exp_c U \\ \exp_c V_p &\subset (\exp_c V)_p \subset \exp_c V, \end{aligned}$$

откуда следует диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} (\exp_c X, \exp_c U) & \xrightarrow{\exp_c f} & (\exp_c Y, \exp_c V) \\ i_1 \downarrow & & \downarrow i_3 \\ (\exp_c X, (\exp_c U)_p) & \xrightarrow{\exp_c f} & (\exp_c Y, (\exp_c V)_p) \\ i_2 \downarrow & & \downarrow i_4 \\ (\exp_c X, \exp_c U_p) & \xrightarrow{\exp_c f} & (\exp_c Y, \exp_c V_p) \\ i \cap & & \cap j \\ (\exp_c X, \exp_c U_p) & \xrightarrow{\exp_c f} & (\exp_c Y, \exp_c V_p) \\ \parallel & & \\ (\exp_c sX, \exp_c sU) & \xrightarrow{\exp_c sf} & (\exp_c sY, \exp_c sV) \end{array}$$

Из диаграммы следует включение  $\exp_c sf(\exp_c sX \setminus \exp_c X) \subseteq \exp_c sY \setminus \exp_c Y$ , что равносильно равномерной совершенности отображения  $\exp_c f$ .

**7.Следствие ([5]).** Отображение  $f: X \rightarrow Y$  совершенно тогда и только тогда, когда совершенно отображение  $\exp_c f: \exp_c X \rightarrow \exp_c Y$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Borubaev A.A. A classification of complete uniform spaces //Tartu Ulik. Toimetised.1990.V.899. P.103-110.
2. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения.-Фрунзе:Илим, 1990.
3. Борубаев А.А., Чекеев А.А. Равномерные структуры на топологических пространствах и группах.-Бишкек: Изд-во при КГПУ им.И.Арабаева, 1997.
4. Morita K. Completion of Hyperspaces of compact subsets and topological completion of open-closed maps // Gen.Topol.Appl.,1974.P.217-233.
5. Choban M.M. Note sure topologie exponentielle //Fund. Math.1977.V.71.P.27-41.



**О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ НАРОСТА РАВНОМЕРНЫХ  
ПРОСТРАНСТВ****Б. Э. Канетов**

Пусть  $(X, U)$  равномерное пространство,  $(\tilde{X}, \tilde{U})$  - пополнение, а  $(\tilde{X} \setminus X, \tilde{U}_{X \setminus X})$  - его нарост в пополнении  $(\tilde{X}, \tilde{U})$ . Пусть  $P$  - некоторое свойство равномерных пространств. Естественно возникает следующая задача: При каких необходимых и достаточных условиях равномерного пространства  $(\tilde{X}, \tilde{U})$ , нарост  $(\tilde{X} \setminus X, \tilde{U}_{X \setminus X})$  обладает свойством  $P$ ?

В классе топологических пространств задача такого типа рассмотрены в работах П.С.Александрова, В.И.Пономарева [1], Ю.М.Смирнова [6], [7], Е.Г.Скляренко [5], В.В.Комфорта, Х.Гордона [8], К.Д.Магилла [9], Г.Д.Димова [4] и др.

Пусть  $X$  топологическое пространство,  $Y$  - бикompактное расширение и  $Y \setminus X$  - нарост пространства  $X$ . Конечная система открытых множеств  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$  называется окаймлением топологического пространства  $X$ , если во-первых, множество  $B = X \cup \Gamma_1$  бикompактно, и, во-вторых, для любой окрестности  $V$  бикompактна  $B$  множества  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ ,  $V$  составляют нормальное покрытие пространства  $X$ . Понятия окаймления было введено Ю.М.Смирновым [7], и далее он показал, что  $\dim(Y \setminus X) \leq n$ , тогда и только тогда, когда на пространстве  $X$  имеется структура окаймлений кратности  $\leq n+1$ , обладающее базисным свойством.

В данной заметке вводится понятие ко-покрытия равномерного пространства  $(X, U)$ . С помощью этого понятия найдены необходимые и достаточные условия равномерного пространства  $(X, U)$ , для того чтобы нарост  $(\tilde{X} \setminus X, \tilde{U}_{\tilde{X} \setminus X})$  (далее будем обозначать через  $\tilde{X} \setminus X = Y, \tilde{U}_{\tilde{X} \setminus X} = V$ ) обладало свойством P.

**Определение 1.** Фильтр  $F$  в равномерном пространстве  $(X, U)$  называется свободным, если  $I \{[\Phi]: \Phi \in F\} = \emptyset$ .

**Определение 2.** Семейство  $\alpha$  подмножеств равномерного пространства  $(X, U)$  назовем ко-покрытием равномерного пространства  $(X, U)$ , если для любого свободного фильтра Коши  $F$  в равномерном пространстве  $(X, U)$  всегда выполняется  $\alpha \upharpoonright F \neq \emptyset$ .

**Предложение 1.** Для того чтобы нарост  $(Y, V)$  равномерного пространства  $(X, U)$  было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы каждое равномерное покрытие  $\alpha \in U$  содержало конечное подсемейство являющееся ко-покрытием равномерного пространства  $(X, U)$ .

**Доказательство.** 1) Пусть  $(X, V)$  - предкомпактное равномерное пространство, а  $\alpha \in U$  - произвольное равномерное покрытие равномерного пространства  $(X, U)$ . Положим  $\tilde{\alpha} = \{\tilde{A}: A \in \alpha\}$ , где  $\tilde{A} = \tilde{X} \setminus [X \setminus A]_Y$ . Тогда известно, что  $\tilde{\alpha}$  - равномерное покрытие равномерного пространства  $(\tilde{X}, \tilde{U})$  (см. [6]). Положим  $\hat{\alpha} = \tilde{\alpha} \wedge Y$ . Так как  $(Y, V)$  - предкомпактное равномерное пространство, то существует конечное равномерное подпокрытие  $\hat{\alpha}_0 \subset \hat{\alpha}$ . Пусть  $\hat{\alpha}_0 = \{\tilde{A}_1 \cap Y, \tilde{A}_2 \cap Y, \dots, \tilde{A}_n \cap Y\}$ . Положим

$\alpha_0 = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ , ясно, что  $\alpha_0 \subset \alpha$ . Покажем, что  $\alpha_0$  - является ко-покрытием равномерного пространства  $(X, U)$ . Действительно, пусть  $F$ -произвольный свободный фильтр Коши в равномерном пространстве  $(X, U)$ . Тогда свободный фильтр Коши  $F$  является базисом фильтра Коши в равномерном пространстве  $(\tilde{X}, \tilde{U})$ . Поэтому фильтр Коши  $F$  сходится к некоторой точке  $x \in (\tilde{X}, \tilde{U})$ . Так как  $F$  - свободный фильтр Коши, то  $x \in Y$ . Через  $B(x)$  обозначим фильтр окрестностей точки  $x \in Y$ . Тогда найдется  $\tilde{A}_k \in \tilde{\alpha}$  такое, что  $x \in \tilde{A}_k \cap Y$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Пусть  $F$  - след фильтра окрестностей  $B(x)$  на  $X$ . Тогда  $B(x) \subset F$ . Значит  $\tilde{A}_k \in B(x)$  и  $A_k \in F$ . Следовательно  $\alpha_0 \cap F \neq \emptyset$ .

2) Обратно, пусть каждое равномерное покрытие  $\alpha \in U$  содержит конечное ко-покрытие  $\alpha_0 \subset \alpha$ . Покажем, что равномерное пространство  $(Y, V)$  предкомпактно. Пусть  $\hat{\beta} \in V$  произвольное равномерное покрытие. Тогда найдется такое равномерное покрытие  $\alpha \in U$ , что покрытие  $\hat{\alpha} = \tilde{\alpha} \wedge Y$  вписано в покрытие  $\hat{\beta}$ . Пусть  $\alpha_0 \subset \alpha$  - конечное ко-покрытие покрытия  $\alpha$ . Покажем, что  $\hat{\alpha}_0 = \{\tilde{A} \cap Y : A \in \alpha_0\}$  является покрытием пространства  $(Y, V)$ .

Пусть  $x \in (Y, V)$ . Через  $B(x)$  - обозначим фильтр окрестностей точки  $x \in (Y, V)$ . Рассмотрим  $F$ -след фильтра окрестностей  $B(x)$  на  $X$ . Тогда  $F$  является свободным фильтром Коши в равномерном пространстве  $(X, U)$ . Так как  $\alpha_0 \in U$  конечное ко-покрытие, то  $\alpha_0 \cap F \neq \emptyset$ , т.е. существует  $A_k \in \alpha_0$  такое, что  $\tilde{A}_k \in F$ ,  $1 \leq k \leq n$  фильтр Коши  $F$  сходится к точке  $x \in (\tilde{X}, \tilde{U})$  как база фильтра Коши в равномерном пространстве  $(\tilde{X}, \tilde{U})$ . Тогда существует  $\tilde{A}_k \in \tilde{\alpha}_0$  такое, что  $x \in \tilde{A}_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Следовательно,  $\tilde{A}_k \in B(x) \subset F$ . Значит  $x \in \tilde{A}_k \cap Y$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

Определение 3. Точка  $x$  равномерного пространства  $(X, U)$  называется точкой его локальной полноты, если существуют открытое в  $(X, U)$  множество  $O$  и полное подпространство  $(M, U_M)$  равномерного пространства  $(X, U)$ , такие, что  $x \in O \subset (M, U_M)$ . Множество всех точек локальной полноты равномерного пространства обозначается через  $\Gamma(X)$ . Равномерное пространства  $(X, U)$  называется локально полным если  $\Gamma(X) = X$ .

$\alpha_0 = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ , ясно, что  $\alpha_0 \subset \alpha$ . Покажем, что  $\alpha_0$  - является ко-покрытием равномерного пространства  $(X, U)$ . Действительно, пусть  $F$ -произвольный свободный фильтр Коши в равномерном пространстве  $(X; U)$ . Тогда свободный фильтр Коши  $F$  является базисом фильтра Коши в равномерном пространстве  $(\tilde{X}, \tilde{U})$ . Поэтому фильтр Коши  $F$  сходится к некоторой точке  $x \in (\tilde{X}, \tilde{U})$ . Так как  $F$  - свободный фильтр Коши, то  $x \in Y$ . Через  $B(x)$  обозначим фильтр окрестностей точки  $x \in Y$ . Тогда найдется  $\tilde{A}_k \in \tilde{\alpha}$  такое, что  $x \in \tilde{A}_k \cap Y$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Пусть  $F$  - след фильтра окрестностей  $B(x)$  на  $X$ . Тогда  $B(x) \subset F$ . Значит  $\tilde{A}_k \in B(x)$  и  $A_k \in F$ . Следовательно  $\alpha_0 \cap F \neq \emptyset$ .

2) Обратно, пусть каждое равномерное покрытие  $\alpha \in U$  содержит конечное ко-покрытие  $\alpha_0 \subset \alpha$ . Покажем, что равномерное пространство  $(Y, V)$  предкомпактно. Пусть  $\hat{\beta} \in V$  произвольное равномерное покрытие. Тогда найдется такое равномерное покрытие  $\alpha \in U$ , что покрытие  $\hat{\alpha} = \tilde{\alpha} \wedge Y$  вписано в покрытие  $\hat{\beta}$ . Пусть  $\alpha_0 \subset \alpha$  - конечное ко-покрытие покрытия  $\alpha$ . Покажем, что  $\hat{\alpha}_0 = \{\tilde{A} \cap Y : A \in \alpha_0\}$  является покрытием пространства  $(Y, V)$ .

Пусть  $x \in (Y, V)$ . Через  $B(x)$  - обозначим фильтр окрестностей точки  $x \in (Y, V)$ . Рассмотрим  $F$ - след фильтра окрестностей  $B(x)$  на  $X$ . Тогда  $F$  является свободным фильтром Коши в равномерном пространстве  $(X, U)$ . Так как  $\alpha_0 \in U$  конечное ко-покрытие, то  $\alpha_0 \cap F \neq \emptyset$ , т.е. существует  $A_k \in \alpha_0$  такое, что  $\tilde{A}_k \in F$ ,  $1 \leq k \leq n$  фильтр Коши  $F$  сходится к точке  $x \in (\tilde{X}, \tilde{U})$  как база фильтра Коши в равномерном пространстве  $(\tilde{X}, \tilde{U})$ . Тогда существует  $\tilde{A}_k \in \tilde{\alpha}_0$  такое, что  $x \in \tilde{A}_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Следовательно,  $\tilde{A}_k \in B(x) \subset F$ . Значит  $x \in \tilde{A}_k \cap Y$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

**Определение 3.** Точка  $x$  равномерного пространства  $(X, U)$  называется точкой его локальной полноты, если существуют открытое в  $(X, U)$  множество  $O$  и полное подпространство  $(M, U_M)$  равномерного пространства  $(X, U)$ , такие, что  $x \in O \subset (M, U_M)$ . Множество всех точек локальной полноты равномерного пространства обозначается через  $\Gamma(X)$ . Равномерное пространства  $(X, U)$  называется локально полным если  $\Gamma(X) = X$ .

Предложение 2. Нарост  $(Y, V)$  равномерного пространства  $(X, U)$  является бикompактным в том и только том случае, если равномерное пространство  $(X, U)$  является локально полным и каждое равномерное покрытие  $\alpha \in U$  содержит конечное подсемейство являющееся ко-покрытием равномерного пространства  $(X, U)$ .

Доказательство. Следует из предложения 1 и предложения из статьи [3].

Предложение 3. Нарост  $(Y, V)$  равномерного пространства  $(X, U)$ ,  $\tau$ -ограничено тогда и только тогда, когда каждое равномерное покрытие  $\alpha \in U$  содержит подсемейство мощностью  $\leq \tau$  которое является ко-покрытием равномерного пространства  $(X, U)$ .

Доказательство. 1) Пусть нарост  $(Y, V)$  равномерного пространства  $(X, U)$  ограничено и  $\alpha \in U$  произвольное равномерное покрытие. Нам известно, что  $\tilde{\alpha}$  является равномерным покрытием равномерного пространства  $(\tilde{X}, \tilde{U})$ ,  $\tilde{\alpha} = \{\tilde{A} : A \in \alpha\}$  где  $\tilde{A} = \tilde{X} \setminus [X \setminus A]_F$ . Тогда  $\hat{\alpha} = \tilde{\alpha} \wedge Y$  является равномерным покрытием равномерного пространства  $(Y, V)$ . В силу ограниченности нароста  $(Y, V)$  равномерного пространства  $(X, U)$  существует равномерное подпокрытие  $\hat{\alpha}_0 \subset \hat{\alpha}$  такое, что  $|\alpha_0| \leq \tau$ . Следовательно  $|\tilde{\alpha}_0| \leq \tau$ . Положим  $|\alpha_0| \leq \tau$ . Далее покажем, что  $\alpha_0$  - ко-покрытие т.е.  $\alpha_0 \uparrow F \neq \emptyset$  для любого свободного фильтра Коши  $F$  в равномерном пространстве  $(X, U)$ . Пусть  $F$  - произвольный свободный фильтр Коши в равномерном пространстве  $(X, U)$ . Оно является базисом фильтра Коши в равномерном пространстве  $(\tilde{X}, \tilde{U})$ . Так как равномерное пространство  $(\tilde{X}, \tilde{U})$  полное, то  $F$  сходится к некоторой точке  $x \in (\tilde{X}, \tilde{U})$ . Но  $F$  свободный фильтр Коши, то  $x \in Y$ . Рассмотрим  $B(x)$  фильтр окрестностей точки  $x \in Y$  в  $(\tilde{X}, \tilde{U})$ . Тогда существует  $\tilde{A} \in \tilde{\alpha}_0$  такое, что  $x \in \tilde{A} \uparrow Y$ . Через  $F$  обозначим след фильтра окрестностей  $B(x)$  на  $X$ . Тогда  $B(x) \subset F$ . То  $\tilde{A} \in B(x)$  и следовательно  $A \in F$ . Так как  $A \in \alpha_0$  и  $A \in F$  то следует, что  $\alpha_0 \uparrow F \neq \emptyset$ ,  $|\alpha_0| \leq \tau$ .

2) Пусть каждое равномерное покрытие  $\alpha \in U$  содержит ко-покрытие  $\alpha_0 \subset \alpha$ . Мы должны показать, что нарост  $(Y, V)$  равномерного пространства  $(X, U)$  ограничено.

Пусть  $\hat{\gamma} \in V$  произвольное равномерное покрытие, тогда существует равномерное покрытие  $\alpha \in U$  такое, что  $\hat{\alpha} = \tilde{\alpha} \wedge Y$  выписано в  $\hat{\gamma}$ . Из условия следует, что подпокрытие  $\alpha_0 \subset \alpha$ , где  $|\alpha_0| \leq \tau$  есть ко-покрытие. Покажем, что  $\hat{\alpha} = \tilde{\alpha} \wedge Y$ ,  $|\hat{\alpha}_0| \leq \tau$  является покрытием нароста  $(Y, V)$  равномерного пространства  $(X, U)$ . Пусть  $x \in (Y, V)$ . Через  $B(x)$  обозначим фильтр окрестностей точки  $x \in (Y, V)$  а  $F$  след филь-тра окрестностей  $B(x)$  на  $X$ . Тогда  $F$  является свободным фильтром Коши в равномерном пространстве  $(X, U)$ . Так как  $\alpha_0 \in U$  ко-покрытие, то  $\alpha_0 \uparrow F \neq \emptyset$  т.е. существует  $A \in \alpha_0$  такое, что  $A \in F$ . Тогда существует  $\tilde{A} \in \tilde{\alpha}_0$  такое, что  $x \in \tilde{A}$ . Значит  $\tilde{A} \in B(x) \subset F$ . Следовательно  $x \in \tilde{A} \uparrow Y$ .

**Предложение 4.** Нарост  $(Y, V)$  равномерного пространства  $(X, U)$  имеет размерность  $\leq n$ , т.е.  $\Delta d(Y, V) \leq n$  в том и только том случае, если каждое равномерное покрытие  $\alpha \in U$  содержит подсемейство  $\alpha_0$  кратности  $\leq n+1$  которое является ко-покрытием равномерного пространства  $(X, U)$ .

**Доказательство.** Пусть нарост  $(Y, V)$  равномерного пространства  $(X, U)$  имеет размерность  $\leq n$ . Пусть  $\alpha \in U$  произвольное равномерное покрытие. Тогда  $\tilde{\alpha} = \{\tilde{A} : A \in \alpha\}$ , где  $\tilde{A} = \tilde{X} \setminus [X \setminus A]_X$  равномерное покрытие равномерного пространства  $(\tilde{X}, \tilde{U})$ . Положим  $\tilde{\alpha} \wedge Y = \hat{\alpha}$ , то  $\hat{\alpha}$  - является равномерным покрытием равномерного пространства  $(Y, V)$ . Тогда существует подпокрытие  $\hat{\alpha}_0 \subset \hat{\alpha}$  кратности  $\leq n+1$ . Тогда  $\alpha_0 \subset \alpha$  подпокрытие покрытия  $\alpha$  кратности  $\leq n+1$ . Покажем что  $\alpha_0$  ко-покрытие кратности  $\leq n+1$ . Пусть  $F$  свободный фильтр Коши. Ясно, что  $F$  является базисом к некоторого фильтра Коши в  $(\tilde{X}, \tilde{U})$ . Так как его можарирующий фильтр Коши сходится к некоторой точке  $x \in (\tilde{X}, \tilde{U})$ , то  $F$  тоже сходится к точке  $x \in (\tilde{X}, \tilde{U})$ . В силу свободности  $F$  в  $(X, U)$  следует что  $x \in Y$ . Пусть  $B(x)$  фильтр окрестностей точки  $x \in Y$ . Тогда существует  $\tilde{A} \in \tilde{\alpha}$  такое, что  $x \in \tilde{A} \uparrow Y$ . Так как  $(Y, V)$  имеет размерность  $\leq n$  то из покрытия  $\hat{\alpha}_0 \subset \hat{\alpha}$  кратности  $\leq n+1$  найдется не более  $n+1$  элементов содержащее точку  $x$ . Тогда выберем хотя бы одно  $\tilde{A}_i \uparrow Y \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} (\tilde{A}_i \uparrow Y)$ ,  $1 \leq i_0 \leq n+1$  такое, что



$\tilde{A}_i \cap X = A_0$ . Ясно, что  $\tilde{A}_i \in B(x)$ . Пусть  $F$  след фильтра окрестностей  $B(x)$  на  $X$ . Тогда  $A_0 \in F$ . Следовательно  $A_0 \in F$  и  $A_0 \in \alpha_0$ , то  $\alpha_0 \cap F \neq \emptyset$ .

2) Пусть каждое равномерное покрытие  $\alpha \in U$  содержит подпокрытия  $\alpha_0 \subset \alpha$  кратности  $\leq n+1$ . Пусть  $\hat{\beta} \in V$  произвольное равномерное покрытие. Тогда существует такое  $\alpha \in U$ , что  $\hat{\alpha} > \hat{\beta}$ , где  $\hat{\alpha} = \tilde{\alpha} \wedge Y$ . Покажем, что  $\hat{\alpha}_0 = \{\tilde{A} \cap Y : \tilde{A} \in \alpha_0\}$  является покрытием равномерного пространства  $(Y, V)$ . Пусть  $x \in (Y, V)$ .  $B(x)$  фильтр окрестностей точки  $x \in (Y, V)$ . Пусть  $F$  след фильтра окрестностей  $B(x)$  на  $X$ . Тогда  $F$  является свободным фильтром Коши в  $(X, U)$ . Так как  $\alpha_0$  покрытие кратности  $\leq n+1$ , то  $F \cap \alpha_0 \neq \emptyset$ . Из покрытия  $\alpha_0$  найдется не более " $n+1$ " элементов, то  $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \in F$ . Следовательно  $\bigcup_{i=1}^{n+1} \tilde{A}_i \in B(x)$  Тогда  $x \in \bigcap_{i=1}^{n+1} (\tilde{A}_i \cap Y)$ .

Следствие 1. При случае  $n=0$  получаем нульмерность нароста  $(Y, V)$  равномерного пространства  $(X, U)$ .

Следствие 2. Нарост  $(Y, V)$  равномерного пространства  $(X, U)$  обладает размерности " $-1$ " тогда и только тогда, когда равномерное пространство  $(X, U)$  полно.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П.С., Пономарев В.И. О бикомпактных расширениях топологических пространств. Вестник МГУ, сер.матем., мех., ;5, 93-108, 1959.
2. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. Фрунзе, Илим, 1990.
3. Борубаев А.А. О пополнениях и отображениях равномерных пространств. Сообщ. АН Грузинской ССР, Т.103, №3, 533-536, 1981.
4. Димов Г.Д. О бикомпактных расширениях периферически бикомпактных пространств с наростами специального вида. П. ЛИСКА Български математически студии, Т.6, 3-18, 1983.
5. Сляренко Е.Г. Некоторые вопросы теории бикомпактных расширений. Изв. АН СССР, сер.матем., Т.26, 427-452, 1962.

- 
6. Смирнов Ю.М. О полноте пространств близости. Тр. ММО, Т.3, 271-306, 1954.
  7. Смирнов Ю.М. О размерности наростов бикompактных расширений близостных и топологических пространств. Матем. сборник, Т.69 (111):1, 141-160, 1966.
  8. Comfort W.W., Gordon H. Disjoint open subsets of  $\beta X \setminus X$ . Trans. Amer. Math. Soc. 111, 513, 1964.
  9. Magill K.D. N-point compactifications. Amer. Math. Monthly, 72, 1075-1081, 1965.
-

## О ПАРАМЕТРАХ УРАВНЕНИЯ СВЕЧЕНИЯ МЕТЕОРОВ

М. Токтогулов

Световой поток  $I$  от метеора в любой точке его траектории может быть представлен в виде:

$$I = I_{\mu} \left[ \frac{1 + (\alpha - 1)\mu}{\mu\alpha} \right]^{\mu/1-\mu} \left[ 1 - \frac{1 - \mu}{1 + (\alpha - 1)\mu} \right]^{\mu/1-\mu} \left( \beta - \frac{1}{H} \right)^{\Delta H} \left( \beta - \frac{1}{H_{\mu}} \right)^{\Delta H} \quad (1)$$

где,  $I_{\mu}$  - световой поток от метеора в точке его максимального блеска;  $\Delta H = H - H_{\mu}$ ;  $H$  и  $H_{\mu}$  - высоты метеорного тела в данной точке и точке максимального блеска;

$\mu$  - параметр, определяющий зависимость между массой метеорного тела и площадью его лобового сечения в процессе испарения метеорного вещества;

$$\alpha = 1 + \frac{12\Gamma Q}{\Lambda \mu \varrho^2}; \Gamma, \Lambda - \text{коэффициенты сопротивления и}$$

теплопередачи,  $Q$  - удельная энергия облучения,  $v$  - скорость метеорного тела. Параметр  $\beta$  вводится соотношением  $S = A m^\mu = A_0 e^{\beta H} m^\mu$  и учитывает изменение параметра формы  $A$  с высоты  $H$ ;  $H^*$  высота однородной атмосферы (шкала высот).

$$\text{Если положить } \alpha=1, \mu=2/3, \beta=0 \quad (2)$$

(что обычно и делается в классической физической теории метеоров) соотношение (1) превращается в более простое полученное Дж. Хокинсом и Р.Саутвортом:

$$I = \frac{9}{4} I_\mu \frac{\rho}{\rho_\mu} \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{\rho}{\rho_\mu} \right)^2 \quad (3)$$

где  $\rho = \rho_0 e^{-H/H^*}$  плотность атмосферы на высоте  $H$ , индекс "μ" относится к максимуму блеска.

Представляется интересным проверить на основании наблюдательных данных о ярких метеорах, насколько вычисленные величины  $\alpha, \mu, \beta$  соответствуют принятым в теории.

Логарифмируя (1), получим соотношение

$$\lg \frac{I}{I_\mu} = a_0 + a_1 \Delta H + a_2 \lg A^*$$

$$a_0 = \frac{\mu}{1-\mu} \lg \frac{1+(\alpha-1)\mu}{\mu\alpha},$$

$$a_1 = \left( \beta - \frac{1}{H^*} \right) \lg e, a_2 = \frac{\mu}{1-\mu},$$

$$A^* = 1 - \frac{1-\mu}{1+(\alpha-1)\mu} \exp \left[ \left( \beta - \frac{1}{H^*} \right) \Delta H \right]$$

Система условных уравнений вида (4) может быть записана для любого метеора и разрешена относительно неизвестных  $a_0, a_1, a_2$  что дает возможность определить из наблюдений величины  $\alpha, \mu, \beta$  и сравнить их с принятыми теоретическими значениями.

Системы (4) были рассмотрены для нескольких десятков метеоров, сфотографированных в Одессе. Вычисление проводились методом

последовательных приближений. В качестве нулевого приближения использовались значения  $\alpha, \mu$  и  $\beta$  из (2)  $H^* = 6,5 \cdot 10^3$  см.

Результаты нескольких решений приведены в таблице 1:

Таблица 1.

№	$\mu$	$\alpha$	$\beta - 1/H^*$	Вычисл. $1/H^*$	Начальн. $1/H^*$	Получено решение при $H^*$ км
6	0,709	1,1015	-0,35301	0,2475	0,1750	5,7
	,721	1,0186	,35870		0,1710	5,85
	,722	1,0073	,35978		0,1706	5,86
20	0,679	1,0989	-0,14466	0,0677	0,1667	6,0
	,730	1,0829	,14917		0,1667	6,0
	,927	1,0168	,16579		0,2000	5,0
64	0,609	1,0145	-0,19716		0,2222	4,5
66	0,795	1,0560	-0,22041		0,45454	2,2
50	0,754	1,0848	-0,14560	0,02551	0,2000	5,0
	,761	1,0398	,14774		0,19608	5,1
	,765	1,0046	,14920		0,19231	5,2
144	0,691	1,0156	-0,24562	0,0788	0,19231	5,2
	,694	1,0043	,24617		0,19047	5,25
219	0,736	1,0928	-0,73911	0,31350	0,20408	4,9
	,740	1,0532	,73962		,19608	5,1
	,743	1,0325	,74282		0,19802	5,05
415	0,675	1,0211	-0,25338		0,20833	4,8
	,678	1,0058	,25428		0,20619	4,85
449	0,631	1,0027	-0,13401		0,16393	6,1
63	0,624	1,0878	-0,58392	0,05000	0,40000	2,5
49	0,737	1,0159	-0,56520	0,4048	0,37037	2,7
35	0,642	1,0037	-0,71302		0,45400	2,2
381 <sup>a</sup>	0,656	1,0101	-0,13965		0,10700	9,35
	0,656	1,0094	-0,13963		0,1065	9,39
312	0,707	1,0046	-0,15298	0,08418	0,10417	9,6
162	0,774	1,0369	-0,26219	0,06017	0,17500	5,7

Аналогичное решение было выполнено для 2-х систем, включающих по 25 метеоров. В первом случае получено:  $\alpha=1.0825$ ,  $\mu=0.72677$ ,  $\beta-1/H^*=$

0.11955,  $\beta=0.0343$ , во втором:  $\alpha=1.0001$ ,  $\mu=0.69365$ ,  $\beta-1/H^*=-0.20458$ ,  $\beta=-0.06171$

Проведенные исследование позволяют убеждать, что средние для данного метеора значения параметров  $\mu$  и  $\alpha$  близки к теоретическим. Величина  $\beta$  не всегда может считаться равной нулю. Последнее, вероятно, подтверждает, тот факт, что параметр формы  $A$  изменяется в процессе облучения.

Численные значения высоты однородной атмосферы можно оценить в каждом отдельном случае используя данные наблюдений. Если  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  плотности атмосферы соответственно на высотах  $H_1$  и  $H_2$ , то для изотермической химически однородной атмосферы легко получить

$$H^* = 2,3 \cdot \frac{H_2 - H_1}{\lg \rho_1 - \lg \rho_2},$$

принимая во внимания, что

$$\lg \rho - \lg \rho_0 = -2,3 \frac{H}{H^*}$$

Мы оценили значения  $H^*$  по данным о некоторых из исследуемых метеоров. Соответствующие данные приводятся в таблице 2, где даны также значения эффективной шкалы высот

$$H_{\text{эф}}^* = \left( \beta - \frac{1}{H^*} \right)^{-1}$$

полученные из решения систем вида (4)

Таблица 2.

Метеор	$H_{\text{набл.}}^*$ , КМ	$H_{\text{эф.}}^*$ , КМ	$H_{\text{набл.}}^* - H_{\text{эф.}}^*$ , КМ
6	9,29	5,86	3,43
20	33,97	5,0	28,97
49	5,68	2,7	2,98
66	21,78	2,2	16,17
144	29,16	5,25	23,91
162	38,23	5,7	32,53
219	7,84	5,05	2,29
312	27,32	9,6	17,72

Погрешности определения высоты метеора не превосходят 0,1 км. Если принять ошибки в определении  $l_{gr}$  того же порядка, то погрешность нахождения  $H_{набл}^*$  не будет превышать 0,5 км. Согласно таблице 2 различие между  $H_{набл}^*$  и  $H_{эф}^*$  значительно отличаются от этого значения. Следовательно, они вызваны какими-то другими причинами. Следует помнить, что  $H_{эф}^*$  - некоторое усредненное значение шкалы высот вдоль метеорного пути,  $H_{набл}^*$  - относится к фиксированному небольшому участку высот.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б.Ю. "Физическая теория метеоров и метеорное вещество в Солнечной системе", М., 1956.
2. Hawkins G.S., Southworth R.B. *Smiths. Contr. Astroph.*, 2, №11, 1958.
3. Токтогулов М., Жуманалиева З. Метеордун жарык агымынын интенсивдүүлүгү. - Сб. научн. трудов. КГПУ им. И.Арабаева, II выпуск. Бишкек, 1997г.



**ОБ ИНДЕКСЕ ПОЛНОТЫ РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ  
ОТОБРАЖЕНИЙ**

**А. А. Борубаев, А. А. Чекеев, Т. Д. Касымова**

В “природе” встречаются свойства равномерных пространств более сильные нежели полнота - это  $H$ -полнота равномерных пространств. Поэтому в этой статье вводится понятие  $H$ -полного равномерно непрерывного отображения и индекса его полноты, который характеризует “степень полноты” равномерно непрерывных отображений, исследуются свойства равномерно непрерывных отображений такие, как равномерная локальная компактность и равномерная полнота по Чеху.

Напомним определение полноты равномерно непрерывного отображения  $f:(X,U) \rightarrow (Y,V)$  равномерного пространства  $(X,U)$  в равномерное пространство  $(Y,V)$ .

**1.Определение [2].** Равномерно непрерывное отображение  $f:(X,U) \rightarrow (Y,V)$  равномерного пространства  $(X,U)$  в равномерное пространство  $(Y,V)$  называется **полным**, если всякий фильтр Коши  $F$  в  $(X,U)$ , для которого  $fF$  сходится в  $(Y,V)$ , сходится в  $(X,U)$ .

Пусть  $(X,U)$  - произвольное равномерное пространство и  $H \subset U$  произвольная система равномерных покрытий. Фильтр  $F$  на множестве  $X$  называется **H-фильтром Коши** в  $(X,U)$ , если  $\alpha \cap F \neq \emptyset$  для любого  $\alpha \in H$ .

**2.Определение.** Равномерно непрерывное отображение  $f:(X,U) \rightarrow (Y,V)$  - равномерного пространства  $(X,U)$  в равномерное пространство  $(Y,V)$  называется **H-полным**, если всякий H-фильтр Коши  $F$  в  $(X,U)$ , для которого  $fF$  имеет точку прикосновения в  $(Y,V)$ , т.е.  $\bigcap \{ \overline{f(F)} : F \in F \} \neq \emptyset$ , имеет точку прикосновения в  $(X,U)$ , т.е.  $\bigcap \{ \overline{F} : F \in F \} \neq \emptyset$ .

Если система  $H \subset U$  является базой равномерности  $U$ , то H-фильтр Коши совпадает с обычным фильтром Коши в  $(X,U)$ , а H-полнота равномерно непрерывного отображения переходит в обычную полноту равномерно непрерывного отображения в смысле А.А.Борубаева [2].

Введем следующее

**3.Определение.** Наименьшее кардинальное число  $\tau$  называется **индексом полноты** равномерно непрерывного отображения  $f$ , если существует такая система  $H \subset U$ , что  $|H| = \tau$  и  $f$  является H-полным. Индекс полноты равномерно непрерывного отображения  $f$  обозначается через  $\kappa(f)$ .

Если для равномерно непрерывного отображения  $f:(X,U) \rightarrow (Y,V)$  равномерного пространства  $(X,U)$  в равномерное пространство  $(Y,V)$   $\kappa(f) \leq \aleph_0$ , то отображение  $f$  называется **равномерно полным по Чеху**.

Всякое равномерно полное по Чеху отображение полно. Обратное, вообще говоря, неверно.

Итак, для  $H$ -полного отображения  $f$  определен индекс полноты, причем либо  $ic(f) = 1$ , либо  $\aleph_n \leq ic(f) \leq w(U)$ .

**4. Определение.** Равномерно непрерывное отображение  $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$  называется **равномерно локально компактным**, если существует такое  $\alpha \in U$ , что отображение  $f|_{A: (A, \tau_{\alpha})} \rightarrow (Y, \tau_{\nu})$  является совершенным в топологическом смысле для любого  $A \in \alpha$ .

**5. Теорема.** Для равномерно непрерывного отображения  $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$  равномерного пространства  $(X, U)$  в равномерное пространство  $(Y, V)$  следующие условия равносильны:

1.  $ic(f) = 1$ .

2. Отображение  $f$  равномерно локально компактно.

**Доказательство.**  $1 \Rightarrow 2$ . Пусть  $H = \{\alpha\} \subset U$  и равномерно непрерывное отображение  $f$  является  $H$ -полным. Пусть  $\beta \in U$  - равномерное покрытие, состоящее из замкнутых множеств и вписанное в покрытие  $\alpha$ . Покажем, что  $f|_{B: (B, U_B)} \rightarrow (Y, V)$  совершенно для любого  $B \in \beta$ . Пусть  $F_B$  - произвольный фильтр в  $B$ . Пусть  $\bigcap \{ \overline{f(F_B)} : F_B \in F_B \} \neq \emptyset$  в  $Y$ , в силу критерия совершенности (см. [1], стр. 349, задача 44), семейство  $F = \{F \subset X : \exists F_B \in F_B : F_B \subset F\}$  является  $H$ -фильтром Коши и  $\bigcap \{ \overline{f(F)} : F \in F \} \neq \emptyset$  в  $Y$ . Так как отображение  $f$  является  $H$ -полным, то  $\bigcap \{ \overline{F} : F \in F \} \neq \emptyset$ . По построению следует, что  $\bigcap \{ \overline{F_B} : F_B \in F_B \} \neq \emptyset$ . Следовательно, отображение  $f|_B$  является совершенным.

$2 \Rightarrow 1$ . Пусть отображение  $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$  равномерно локально компактно. Тогда существует такое  $\alpha \in U$ , что  $f|_A$  совершенно для любого  $A \in \alpha$ . Положим  $H = \{\alpha\}$ . Пусть  $F$  - произвольный  $H$ -фильтр Коши в  $(X, U)$ , т.е.  $F \cap \alpha \neq \emptyset$  для любого  $\alpha \in H$ . В силу того, что  $f|_A$  совершенно существует такое  $A \in \alpha$ , что  $A \cap F \neq \emptyset$ ,  $F \in F$ . Семейство  $\{A \cap F : F \in F\}$  - база фильтра  $F$  в  $A$ . Так как  $\bigcap \{ \overline{f(A \cap F)} : F \in F \} \neq \emptyset$ , то  $\bigcap \{ \overline{A \cap F} : F \in F \} \neq \emptyset$ . Тогда

$\bigcap \{ \overline{f(F)} : F \in \mathcal{F} \} \neq \emptyset$ , что влечет  $\bigcap \{ \overline{F} : F \in \mathcal{F} \} \neq \emptyset$ , следовательно, отображение  $f$  является  $\mathcal{H}$ -полным. Следовательно,  $ic(f) = 1$ .

**6.Следствие.** Всякое равномерно локально компактное отображение  $f:(X,U) \rightarrow (Y,V)$  равномерного пространства  $(X,U)$  в равномерное пространство  $(Y,V)$  является равномерно полным по Чеху.

**7.Предложение.** Пусть  $f:(X,U) \rightarrow (Y,V)$  и  $g:(Z,W) \rightarrow (Y,V)$ , - равномерно непрерывные отображения. Если существует такое совершенное равномерно непрерывное отображение  $h:(X,U) \rightarrow (Z,W)$ , что  $f = g \cdot h$ , тогда  $ic(f) \leq ic(g)$ .

**Доказательство.** Пусть  $L \subset V$  - такая система покрытий, что отображение  $g:(Z,W) \rightarrow (Y,V)$  является  $L$ -полным и  $ic(g) = |L|$ . Положим  $\mathcal{H} = \{ f^{-1}(\beta) : \beta \in L \}$ . Покажем, что отображение  $f:(X,U) \rightarrow (Y,V)$  является  $\mathcal{H}$ -полным и  $ic(f) = |\mathcal{H}|$ . Пусть  $F$  - произвольный  $\mathcal{H}$ -фильтр Коши в  $(X,U)$ . Тогда  $fF$  является  $L$ -фильтром Коши  $(Y,V)$ , и, в силу  $L$ -полноты отображения  $g$ ,  $fF$  имеет точку прикосновения в  $(Y,V)$ , т.е.  $\bigcap \{ \overline{f(F)} : F \in \mathcal{F} \} \neq \emptyset$ . Так как отображение  $h$  совершенно, то фильтр  $F$  имеет точку прикосновения в  $(X,U)$  (см.[15], стр. 157), т.е.  $\bigcap \{ \overline{F} : F \in \mathcal{F} \} \neq \emptyset$ . А это означает, в силу определения 2., отображение  $f$  является  $\mathcal{H}$ -полным и  $ic(f) = |\mathcal{H}|$ . Ясно, что  $|\mathcal{H}| \leq |L|$ , поэтому  $ic(f) \leq ic(g)$ .

**8.Следствие.** Пусть  $f:(X,U) \rightarrow (Y,V)$  и  $g:(Z,W) \rightarrow (Y,V)$ , - равномерно непрерывные отображения и существует такое совершенное равномерно непрерывное отображение  $h:(X,U) \rightarrow (Z,W)$ , что  $f = g \cdot h$ . Тогда если отображение  $g$  равномерно полно по Чеху, то отображение  $f$  также равномерно полно по Чеху.

Если  $Y$  - одноточечное множество, имеем

**9.Следствие.** Пусть  $f:(X,U) \rightarrow (Y,V)$  - совершенное равномерно непрерывное отображение равномерного пространства  $(X,U)$  на равномерное пространство  $(Y,V)$ . Если равномерное пространство  $(Y,V)$  равномерно полно по Чеху, то равномерное пространство  $(X,U)$  также равномерно полно по Чеху.

**10. Следствие [3].** Пусть  $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$  - совершенное равномерно непрерывное отображение равномерного пространства  $(X, U)$  на равномерное пространство  $(Y, V)$ . Если равномерное пространство  $(Y, V)$  полно, то равномерное пространство  $(X, U)$  также полно и  $ic(U) \leq ic(V)$ .

**11. Теорема.** Пусть  $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$  - равномерно открытое равномерно непрерывное отображение равномерного пространства  $(X, U)$  на равномерное пространство  $(Y, V)$  и  $ic(f) \leq \tau$ . Тогда если  $ic(V) \leq \tau$ , то  $ic(U) \leq \tau$ .

**Доказательство.** Так как  $ic(f) \leq \tau$ , то существует такая система  $\xi \subset U$  открытых покрытий, что  $|\xi| = \tau$  и  $f$  является  $\xi$ -полным отображением. Покажем, что если  $ic(V) \leq \tau$ , то  $ic(U) \leq \tau$ . Пусть  $F$  -  $\xi$ -фильтр Коши в  $(X, U)$ , т.е.  $F \cap \alpha \neq \emptyset$  для любого  $\alpha \in \xi$ . В силу равномерной открытости отображения  $f$ , имеем систему  $\eta = \{f(\alpha) : \alpha \in \xi\} \subset V$ ,  $|\eta| \leq \tau$ . Так как  $f$  - равномерно открыто, то  $\beta = f(\alpha)$  для любого  $\beta \in \eta$  и  $f(F) \cap \beta \neq \emptyset$ , где  $f(F) = \{fF : F \in F\}$ , т.е.  $f(F)$  является  $\eta$ -фильтром Коши в  $(Y, V)$ . Поскольку  $f(F)$  -  $\eta$ -фильтр Коши и  $ic(V) \leq \tau$ , то  $\bigcap \{f(F) : F \in F\} \neq \emptyset$ . В силу того, что  $ic(f) \leq \tau$ , следует  $\bigcap \{\bar{F} : F \in F\} \neq \emptyset$ . А это означает, что равномерное пространство  $(X, U)$  является  $\xi$ -полным. Следовательно,  $ic(U) \leq \tau$ .

**12. Следствие.** Пусть  $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$  - равномерно открытое равномерно непрерывное равномерно полное по Чеху отображение равномерного пространства  $(X, U)$  на равномерное пространство  $(Y, V)$ . Тогда если равномерное пространство  $(Y, V)$  равномерно полно по Чеху, то равномерное пространство  $(X, U)$  также равномерно полно по Чеху.

**13. Теорема.** Пусть равномерно открытое равномерно непрерывное отображение  $f: (X, U) \rightarrow (Y, V)$  равномерного пространства  $(X, U)$  на равномерное пространство  $(Y, V)$ . Тогда  $ic(U) = ic(V) = ic(f)$ .

**Доказательство.** Сохранение индекса полноты равномерных пространств  $(X, U)$  и  $(Y, V)$  в сторону прообраза следует из теоремы 11. Покажем сохранение индекса полноты равномерных пространств  $(X, U)$  и  $(Y, V)$  в сторону образа, т.е. из условия  $ic(U) \leq \tau$ , следует  $ic(V) \leq \tau$ .

Пусть для отображения  $f:(X,U) \rightarrow (Y,V)$  имеет место  $ic(U) = ic(f) \leq \tau$ . Выберем систему покрытий  $B \subset V$  такую, что  $|B| \leq \tau$ . Пусть  $\xi$  -  $B$ -фильтр Коши в  $(Y,V)$ , т.е.  $\xi \cap \beta \neq \emptyset$  для любого  $\beta \in B$ . Система  $\{f^{-1}(K): K \in \xi\}$  является базой фильтра в  $X$ . В силу равномерной открытости и равномерной непрерывности отображения  $f$ , существует такая система  $H = \{f^{-1}(\beta): \beta \in B\} \subset U$ , что  $f^{-1}(\xi) \cap f^{-1}(\beta) \neq \emptyset$ , следовательно,  $f^{-1}(\xi)$  является базой  $H$ -фильтра Коши в  $(X,U)$ . Так как  $ic(f) \leq \tau$ ,  $ic(U) \leq \tau$  и  $\bigcap \{f^{-1}(K): K \in \xi\} \neq \emptyset$ , а это влечет  $\bigcap \{\bar{K}: K \in \xi\} \neq \emptyset$ , следовательно,  $ic(V) \leq \tau$ .

**14.Следствие.** Пусть  $f:(X,U) \rightarrow (Y,V)$  - равномерно открытое равномерно непрерывное равномерно полное по Чеху отображение равномерного пространства  $(X,U)$  на равномерное пространство  $(Y,V)$ . Тогда равномерная полнота по Чеху равномерных пространств  $(X,U)$  и  $(Y,V)$  сохраняется как в сторону образа, так и в сторону прообраза.

**15.Предложение.** Пусть  $f:(X,U) \rightarrow (Y,V)$  - равномерно непрерывное отображение равномерного пространства  $(X,U)$  в равномерное пространство  $(Y,V)$  и  $ic(f) \leq \tau$ . Тогда для всякой точки  $y \in Y$   $ic(U|_{f^{-1}(y)}) \leq \tau$ .

**Доказательство.** Пусть  $y \in Y$  - произвольная точка и  $U|_{f^{-1}(y)}$  - равномерность, индуцированная  $f^{-1}(y)$  равномерностью  $U$ . Пусть  $\xi \subset U|_{f^{-1}(y)}$  - система покрытий,  $|\xi| \leq \tau$  и  $F$ - произвольный  $\xi$  - фильтр Коши в равномерном пространстве  $(f^{-1}(y), U|_{f^{-1}(y)})$ , т.е.  $F \cap \alpha \neq \emptyset$  для всех  $\alpha \in \xi$ . Ясно, что  $\bigcap \{\overline{f(F)}: F \in F\} = \{y\}$  (\*\*).

По определению равномерности подпространства, существует система  $\xi' \subset U$  такая, что  $\xi' \wedge f^{-1}(y) = \xi$  и  $|\xi'| \leq \tau$ . Ясно, что  $F \cap \alpha' \neq \emptyset$  для всех  $\alpha' \in \xi'$ . Итак,  $F \wedge \xi'$  - фильтр Коши в равномерном пространстве  $(X,U)$  и, в силу (\*\*),  $\bigcap \{\overline{f(F)}: F \in F\} \neq \emptyset$ . Так как  $ic(f) \leq \tau$ , то следует, что  $\bigcap \{\bar{F}: F \in F\} \neq \emptyset$ . Что и требовалось доказать.

**16.Следствие.** Пусть  $f:(X,U) \rightarrow (Y,V)$  - полное равномерно непрерывное отображение равномерного пространства  $(X,U)$  в

равномерное пространство  $(Y, V)$ . Тогда равномерное пространство  $(f^{-1}(y), U|_{f^{-1}(y)})$  полно для всякой точки  $y \in Y$ .

**17.Следствие.** Пусть  $f:(X, U) \rightarrow (Y, V)$  - равномерно непрерывное полное по Чеху отображение равномерного пространства  $(X, U)$  в равномерное пространство  $(Y, V)$ . Тогда равномерное пространство  $(f^{-1}(y), U|_{f^{-1}(y)})$  полно по Чеху для всякой точки  $y \in Y$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях.- Москва: Наука, 1974.
2. Borubaev A.A. On completeness and completions of uniformly continuous mappings //Zbornik radova Filozofskog fakulteta u Nisu Serija Matematika.- 4(1990).-95-97.
3. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения.-Фрунзе: Илим, 1990.



## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

М. Дж. Джаманбаев

Предлагается методика определения коэффициента теплопроводности грунта большим содержанием льда, песка и гравия.

Как известно от точности определения коэффициента теплопроводности зависит точность прогнозных расчетов теплопереноса в грунтах. Сложная неоднородность грунта, расположенная в условиях вечной мерзлоты, затрудняет в лабораторных условиях определять коэффициент теплопроводности, так как она имеет разные теплофизические характеристики, изменяющиеся как по глубине залегания, так и по времени года. Кроме того при бурении грунта для отбора проб лед, содержащиеся в пробах полностью оттаивает, что нарушается естественное состояние грунта и влечет за собой погрешность в методике определения коэффициента теплопроводности. Поэтому разработка методики определения коэффициента теплопроводности неоднородной среды, позволяющая использовать более точные косвенные информации о состоянии грунта в ненарушенном естественном состоянии, является необходимой и актуальной задачей.

В данной работе предлагается методика определения коэффициента теплопроводности неоднородной среды, основанная на использовании информации о температуре грунта в ненарушенном естественном

состоянии на разных глубинах залегания и в разные моменты времени. Идея предложенной методики изложена в работе [1] и проходит для одномерной, двумерной и трехмерной задачи. Поэтому для иллюстрации методики определения коэффициента теплопроводности неоднородной среды рассмотрим математическую модель одномерного процесса переноса тепла без источника тепла на глубину  $L$ .

$$k \partial_t T = \partial_x (c \rho \partial_x T), \quad (1)$$

$$T(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, L]. \quad (2)$$

$$T(0, t) = f(t), \quad t \in [0, t^*]. \quad (3)$$

$$T(L, t) = T_0. \quad (4)$$

Здесь уравнение (1) описывает процесс распространение тепла в неоднородной среде без источника тепла, уравнение (2) означает начальное условие температуры в какой-то момент времени, получаемое с помощью датчиков температуры, расположенных по глубине скважины; (3), (4) - граничные условия температуры, получаемые из наблюдения или возможные прогнозные значения температуры на дневной поверхности. В такой постановке однозначно определить коэффициент теплопроводности и значение температуры грунта в любой момент времени как решение начально - краевой задачи (1) - (4) затруднительно из-за нехватки дополнительной непрерывной информации. Поэтому для решения такой задачи используется аналогичный подход как в работе [1]. Сущность такого подхода заключается в том, что рассматриваемая глубина  $L$ , в зависимости от характера изменения температуры, разбивается на конечные элементы и в каждом элементе предполагается постоянство коэффициента теплопроводности данного грунта. Тогда в каждом элементе вместо уравнения теплопроводности (1) с переменным коэффициентом рассматривается уравнение теплопроводности с постоянным коэффициентом

$$\partial_t T = a_i^2 \partial_{xx} T, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (5)$$

где  $a_i^2 = k_i / c \rho_i = \text{const}$  - коэффициент температуропроводности,  $k_i$  - коэффициент теплопроводности,  $c_i$ ,  $\rho_i$  - теплоемкость и плотность грунта,  $n$  - количество элементов. Таким образом процесс переноса тепла в неоднородной среде описываемый одним уравнением (1) с

переменными коэффициентами, будет моделироваться системой уравнений (5) с постоянными коэффициентами, количество которой совпадает с количеством элементов в области. Отсюда следует, что для определения постоянного значения коэффициента теплопроводности в каждом элементе необходимо задание одного условия. Здесь в качестве этого условия будет использоваться известное начальное условие (2). Итого по области получится дискретное множество коэффициента теплопроводности.

Приближенное решение в каждом элементе ищется в виде

$$T(x,t,a) = \alpha_0 + \alpha_1 N_1(x,t,a) + \alpha_2 N_2(x,t,a), \quad (6)$$

где  $T$  - температура грунта,  $N_i$  - частные решения одномерного уравнения теплопроводности (5), являющиеся базисными функциями

$$N_1(x,y,t,a) = \exp(-x/a) \cos(x/a - 2t), \quad (7)$$

$$N_2(x,y,t,a) = \exp(-x/a) \sin(x/a - 2t), \quad (8)$$

$\alpha_i$  - коэффициенты разложения, определяемые через узловые значения температуры аналогично [2]. Подставляя их в выражение (6) получаем следующее аналитическое выражение для температуры  $T$

$$T(x,t,a) = N_i(x,t,a) T_i + N_j(x,t,a) T_j + N_k(x,t,a) T_k. \quad (9)$$

Здесь  $T_i, T_j, T_k$  - неизвестные узловые значения температуры грунта,  $a$  - коэффициент теплопроводности,  $N_i(x,t,a)$  - аналоги функции формы

$$N_i(x,t,a) = [a_i + b_i N_1 + d_i N_2] / \Delta, \quad (10)$$

где  $\Delta, a_i, b_i, d_i$  - определяются аналогично [2]. Явная зависимость решения задачи от теплофизических характеристик среды позволяет определять их, как решение трансцендентных уравнений

$$T(x,a,t) = N_i(x,a,t) T_i^{(0)} + N_j(x,a,t) T_j^{(0)} + N_k(x,a,t) T_k^{(0)} = T_{\text{жсл}} \quad (11)$$

Здесь  $T_i^{(0)}$  - известные заданные начальные условия температурного поля,  $i, j, k$  - номера узлов соответствующего элемента. В каждом элементе, согласно начальному условию температуры, находятся им соответствующие коэффициенты теплопроводности. Используя найденные значения коэффициентов теплопроводности решается прямая задача теплопроводности, согласно принципу метода конечных элементов (МКЭ) [2]. Точность методики такого подхода определения

коэффициента и решения задачи теплопроводности будет достаточно высокая и близкая к точному решению, так как решение в каждом элементе строится точно через частные решения уравнения теплопроводности и интегрирование интегралов, содержащихся в коэффициентах системы линейных алгебраических уравнениях, происходит точно в квадратурах из - за простых аналитических выражений базисных функций.

В качестве примера рассмотрена место расположение хвостохранилища золоторудного комбината на Кумторе [ 3 ], находящегося в условиях вечной мерзлоты. Место расположение исследовано с помощью системой скважин, пробуренных в разных местах глубиной от 10 м. до 30 м. и показывает, что она подостлана разнородным гляциозерным глинистым илом с большим содержанием льда, песка и гравия. Конкретно рассмотрена данные наблюдения температуры скважины ВН93 - 12 от 23 июня 1993 г. глубиной 30 м. Согласно которой образована начальное условие задачи. Как видно из рис. 1 в зоне примерно до 1,7 м. от дневной поверхности происходит активное изменение температуры и дальше начинается вечная мерзлота. В зависимости от температуры дневной поверхности и окружающей среды происходит оттаивание вечной мерзлоты. Определение фронта таяния вечной мерзлоты является другой задачей и в данной работе она не рассматривается. Для определения коэффициента теплопроводности и решения задачи распространение тепла в грунтах, расположенной в условиях вечной мерзлоты согласно изложенной методики данная глубина подразделена на 17 элементов. Мелкое разбиение проводилось в зоне активного слоя, где изменение температуры происходит быстрее и крупное разбиение - в зоне вечной мерзлоты, где изменение температуры происходит медленно. Результаты расчетов приведены в табл.1. В первой строке приведены номера элементов, во второй строке соответствующая глубина грунта, в третьей строке соответствующее значение коэффициента температуропроводности  $a^2 = k/c \rho$ .

Таблица 1

## Значения коэффициента температуропроводности

№	1	2	3	4	5
y (м)	0.5 - 1.5	1.5 - 2.5	2.5 - 3.5	3.5 - 4.5	4.5 - 6.5
$a^2$	$0.272 \cdot 10^{-4}$	$0.145 \cdot 10^{-4}$	$0.247 \cdot 10^{-4}$	$0.107 \cdot 10^{-4}$	$0.500 \cdot 10^{-3}$
№	6	7	8	9	10
Y (м)	6.5 - 8.5	8.5 - 10.5	10.5 - 12.5	12.5 - 14.5	14.5 - 16.5
$a^2$	$0.143 \cdot 10^{-4}$	$0.339 \cdot 10^{-4}$	$0.107 \cdot 10^{-4}$	$0.107 \cdot 10^{-4}$	$0.164 \cdot 10^{-4}$
№	11	12	13	14	15
Y (м)	16.5 - 18.5	18.5 - 20.5	20.5 - 22.5	22.5 - 24.5	24.5 - 26.5
$a^2$	$0.107 \cdot 10^{-4}$	$0.209 \cdot 10^{-4}$	$0.240 \cdot 10^{-4}$	$0.196 \cdot 10^{-4}$	$0.259 \cdot 10^{-4}$

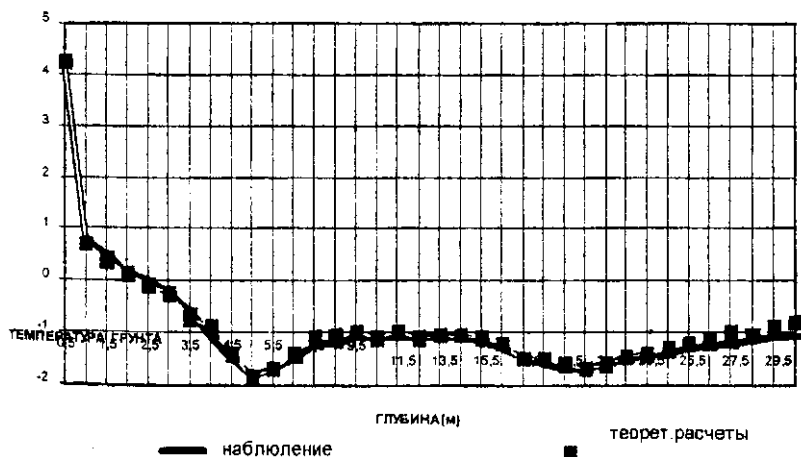


Рис. 1 Температура грунта

Используя эти значения коэффициентов, решена задача распространения тепла в этом неоднородном грунте. Вычисленные значения температуры сопоставлены с данными наблюдения. Как видно из рис. 1 результаты расчета и данные наблюдения в скважине ВН93 - 12 хорошо согласуются. Такое хорошее согласование результатов расчета с

данными наблюдения подтверждает вышеизложенное утверждение о точности предложенной методики определения коэффициента теплопроводности неоднородной среды и решение задачи распространения тепла в грунтах, расположенной в условиях вечной мерзлоты.

Идея такого подхода решения задачи определения коэффициента и распространения тепла в грунтах проходит для двумерной и трехмерной постановке, так как к соответствующим аргументам в выражениях приближенного решения (6), (7), (8) добавляются необходимое количество переменных, характеризующих размерность задачи как в работе [1].

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джаманбаев М.Дж. К точному решению задачи нестационарной фильтрации/ Бишкек, 1993.- 5 с. Рукопись деп. в КыргызНИИТИ 16.12.93. N 650,650а.
2. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов: Пер. с англ.- М.: Мир, 1979.-392с.
3. Detailed Geotechnical Investigations Kumtor Mine Facilities. VOL. 1. Kilborn Enka, 1995.

## ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ТРЕХМЕРНЫХ МГД-ПОТОКОВ

Н. О. Гордеева, А. Ж. Жайнаков, Р. М. Урусов

Для расчета характеристик МГД-потоков используется полная система уравнений магнитной газовой динамики, которая включает уравнение сохранения энергии, уравнения движения, уравнение неразрывности и уравнения Максвелла.

Часть источникового члена в уравнении движения составляет градиент давления. Но в систему не входит явное уравнение для определения давления и не очевиден способ нахождения давления.

При расчете плоских или осесимметричных потоков широко используется метод решения в переменных вихрь - функция тока<sup>1,2/</sup>, где давление исключается из уравнений движения путем перекрестного дифференцирования. При этом переменная вихрь определяется как

$$\zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}, \text{ где } u, v - \text{ составляющие скорости,}$$

а переменная функция тока устанавливается из соотношений

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v$$

и имеет ясный физический смысл : касательная к линии  $\psi = \text{const}$  определяет направление вектора скорости.

Уравнения для переноса вихря и функции тока записываются :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{V} \cdot (\nabla \zeta) = \mu \nabla^2 \zeta$$

$$\nabla^2 \psi = \zeta$$

где  $\mu$  - коэффициент вязкости,  $\vec{V}$  - вектор скорости;

Таким образом, кроме исключения давления из уравнений, при таком подходе три неизвестные величины ( $u, v, P$ ) заменяются двумя ( $\psi, \zeta$ ). Вместо двух уравнений движения и уравнения неразрывности приходится решать одно уравнение переноса вихря и одно уравнение для функции тока.

Но для ряда задач в случае ( $\psi, \zeta$ )-системы возникают сложности с постановкой граничных условий [1,4]. В нестационарном случае, когда требуется получить меняющееся по времени поле давления, необходимое при расчете коэффициентов переноса газа, в ( $\psi, \zeta$ )-систему также нужно включать уравнение для давления. Поэтому при практическом использовании сравнительные достоинства применения ( $\psi, \zeta$ )-системы и ( $u, v, P$ )-системы для расчета плоских течений зависят от решаемой задачи.

В большинстве случаев имеют место потоки, для которых не выполняется условие осевой симметрии, расчет их характеристик необходимо проводить на основе трехмерной системы уравнений. В некоторых работах предлагается обобщить метод решения в переменных вихрь - функция тока на случай пространственных течений. К примеру, в работах [1,3] показано, что задачу о пространственном течении можно решить взяв систему уравнений, аналогичную ( $\psi, \zeta$ )-системе. Вектор вихря определяется следующим образом :

$$\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{V}$$

$$\zeta_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \zeta_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}; \zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

что отличается знаком от ранее принятого определения вихря для плоских течений ( $\zeta = -\zeta_z$ ). В этом случае уравнение переноса вихря записывается для каждой составляющей.



Функции тока как таковой, в трехмерном случае не существует. Но можно ввести векторный потенциал скорости из предположения о соленоидальности векторного поля скорости :

$$\vec{V} = \nabla \times \vec{\psi}$$

$$u = \frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z}; v = \frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x}; w = \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y}$$

Связь между  $\xi$  и  $\psi$  выражается уравнением :

$$\nabla \times \nabla \times \psi = \zeta$$

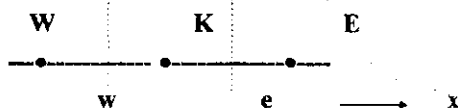
Таким образом, в трехмерном случае, при введении переменных вихрь - потенциал скорости, задача будет включать шесть независимых переменных - три составляющие вихря и три составляющие потенциала скорости, тогда как в случае (V,P)-системы останется четыре переменные - три составляющие скорости и давление. Следовательно, в переменных ( $\psi, \zeta$ ) задача окажется сложнее.

Основываясь на вышеизложенном, для трехмерных потоков предпочтительнее разрабатывать не способы исключения давления из уравнений, а методику нахождения поля давления.

Можно предложить определение давления через уравнение неразрывности косвенным способом : если правильное поле давления подставить в уравнение движения, то получаемое поле скорости должно удовлетворять уравнению неразрывности/4/. На этом строится прямой метод для нахождения давления.

До формулировки численного метода решения задачи, необходимо обратить внимание на некоторые трудности, которые ведут к возможности получения нефизических решений. Эти сложности связаны с наличием первых производных в уравнении движения и в уравнении неразрывности. Основные методы численного решения задач о течениях основаны на замене непрерывной области конечно-разностной схемой и преобразовании системы дифференциальных уравнений к системе

линейных алгебраических уравнений. При составлении дискретного аналога уравнение движения интегрируют по контрольному объему.



**Рис.1** Расположение узловых точек и граней контрольного объема в направлении  $x$ .

В результате интегрирования в дискретный аналог войдет разность давлений на гранях контрольного объема, чтобы выразить эту разность через значения давления в узловых точках, можно предположить, что давление между узловыми точками изменяется по линейному закону. Если обозначить грани контрольного объема в направлении  $x$  как  $e, w$ , а узловые точки как  $E, W, K$  (рис. 1) то

$$p_w - p_e = \frac{p_K - p_E}{2}$$

дискретный аналог будет содержать разность давлений между двумя не соседними точками. Значит давление берется с более грубой сетки, чем основная. Следствием данной аппроксимации будет то, что любое зигзагообразное нефизичное поле давления будет восприниматься в уравнении движения как однородное.

Аналогичная трудность возникает при построении дискретного аналога уравнения неразрывности. Линейная аппроксимация уравнения неразрывности приведет к приравниванию скоростей в чередующихся узловых точках. Такому дискретному аналогу может удовлетворять нефизичное поле скорости.

Описанные трудности можно преодолеть используя подход, когда каждая зависимая переменная рассчитывается на своей сетке. При расчете составляющих скорости рекомендуется определять их на сетке, отличной от сетки, используемой для других переменных. Выгоднее всего сместить сетку для составляющих скорости в шахматном порядке относительно основной сетки. Тогда составляющие скорости рассчитываются для точек, лежащих на гранях контрольных объемов. Введение шахматной сетки

несет два важных преимущества. Дискретный аналог уравнения неразрывности содержит разности составляющих скорости в соседних точках, следовательно нефизичное поле скорости не будет удовлетворять уравнению неразрывности. Разность давлений между двумя соседними узловыми точками будет определять составляющую скорости в точке, расположенной между этими узловыми точками.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика, М.: Мир, 1980
2. Госмен А.Д. и др. Численные исследования течений вязкой жидкости, М.: Мир, 1972
3. Hirasaki G.J. A general formulation of the boundary conditions on the vector potential in three-dimensional hydrodynamics. Texas, 1967
4. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ, С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА

М.Дж. Джаманбаев

Приводится методика идентификации коэффициента фильтрации и решение задач фильтрации с помощью градиентного метода.

Ранее в работе [1] было показано методика решение задач идентификации приближенно-аналитическим методом. Сущность которого заключалась в том, что приближенное решение задачи строилась не с помощью произвольных базисных функций, как встречается в других приближенных методах, а с помощью базисных функций, являющиеся частными решениями основной уравнении. Такой подход к решению задачи фильтрации понижает размерность задачи и является более экономичной и простой при реализации на ЭВМ. Трудностью такого подхода заключалась в нахождении базисных функций, являющиеся частными решениями уравнении фильтрации. Такая трудность преодолена с помощью аппарата группового анализа дифференциальных

уравнений [ 2 ] , который позволяет определять линейно - независимые частные решения и вид функциональной зависимости коэффициента фильтрации из условия инвариантности относительно  $\cdot$  групп преобразований, допускаемый уравнением фильтрации. Коэффициенты разложения "  $a_i$  " приближенного решения определяются из необходимого условия минимума квадратичного функционала, характеризующего невязку граничного условия вдоль границы области фильтрации методом наименьших квадратов (МНК). Недостатком этого подхода является то, что МНК при увеличении количества базисных функций в целях повышения точности аппроксимации приближенного решения, приводит к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с плохообусловленной матрицей, решение которой является неустойчивой. Во избежания этого недостатка в данной работе предлагается метод сопряженных градиентов [2] , основанный на вычислении коэффициентов разложения и постоянных параметров, содержащихся в выражении коэффициента фильтрации, не решая систему линейных алгебраических уравнений с плохообусловленной матрицей. Применение предложенного подхода, к идентификации коэффициента и решение задачи фильтрации, покажем на примере стационарной фильтрации без учета инфильтрации и испарения. Такой физический процесс математически моделируется дифференциальным уравнением

$$D_x (k D_x H) + D_y (k D_y H) = 0 \quad (1)$$

и соответствующими краевыми условиями. Здесь  $k(x,y)$  - коэффициент фильтрации неоднородной пористой среды,  $H(x,y)$  - напорная функция.

Требуется определить коэффициент фильтрации неоднородной пористой среды и напорную функцию, удовлетворяющие уравнению фильтрации (1) и соответствующим краевым условиям, а также дополнительным условиям

$$H(x_i, y_i) = h_i, \quad i = 1, n_1;$$

$$k(x_i, y_i) = k_i, \quad i = 1, m; \quad (2)$$

Как известно в работе [ 1 ] с помощью аппарата группового анализа для уравнения (1) было установлено , что существует функциональная структура коэффициента фильтрации следующего вида :

$$k(x, y) = F_1(t), \quad k(x, y) = F_2(z) \quad (3)$$

и им соответствующие инвариантные решения в виде последовательностей. Здесь  $F_1$ ,  $F_2$  - произвольные функции от аргументов  $t = (ax + b)/(ay + c)$  и  $z = (cx - by)$  соответственно. В частности для видов коэффициента фильтрации

$$k(x, y) = k_0 (ax + b)^r / (ay + c)^s, \quad (4)$$

$$k(x, y) = k_0 \exp(cx - by) \quad (5)$$

и им соответствующим частным решениям, численно доказано [4] линейная независимость и полнота т.е. показано возможность построения приближенного решения различных задач фильтрации с помощью полученных частных решений. В данной работе для решения задачи фильтрации (1) - (2) в качестве базисной функции использовано частные инвариантные решения вида :

$$H_i(x, y, k_0, b, c) = k_0 \exp \left\{ 0.5 (-b i^{-1} + c(-1 - i^{-1} \sqrt{i^2 - 1}))x + \right. \\ \left. + 0.5 (-b i^{-1} - c i^{-1}(-1 - i^{-1} \sqrt{i^2 - 1}))y \right\} \quad (6)$$

и им соответствующий коэффициент фильтрации вида (5).

Приближенное решение изложенной задачи строится в виде

$$H_n(x, y) \approx \sum_i a_i H_i(x, y, k^0, c, b), \quad (7)$$

где  $H_i(x, y, k^0, c, b)$  - известные базисные функции (6), являющиеся частными решениями уравнения фильтрации;  $a_i$  - неизвестные коэффициенты разложения;  $k^0$ ,  $c$ ,  $b$  - неизвестные постоянные параметры, содержащиеся в выражении коэффициента фильтрации (5). Определение коэффициентов разложения и произвольных параметров или решение задачи параметрической идентификации производится итерационной процедурой, состоящей из трех этапов.

1 этап. Определение параметров фильтрации  $k_0^{(0)}$ ,  $c^{(0)}$ ,  $b^{(0)}$  необходимых для начала счета. В практике их выбирают из опытно-фильтрационных работ (ОФР). В данном случае они находятся из необходимого условия минимума функционала

$$L(k^{(0)}, c^{(0)}, b^{(0)}, k_e^1, \dots, k_e^r) = \sum_i (k_0 \exp(c x_i - b y_i) - k_e^i)^2, \quad (8)$$

2 этап. Граничные условия задачи удовлетворяются из условия минимума функционала, характеризующего невязку граничных условий вдоль границы области

$$L_1(a_1, \dots, a_n, k^{(0)}, c^{(0)}, b^{(0)}) = \int_{\Gamma_1} (H_n - h_1)^2 ds + \int_{\Gamma_2} (H_n - h_2)^2 ds + \alpha \int_{\Gamma_{3,4}} (k \partial_n H)^2 ds. \quad (9)$$

Здесь  $\Gamma_1, \Gamma_2$  - границы области фильтрации, вдоль которой выполняются граничное условие первого рода,  $\Gamma_{3,4}$  - границы, вдоль которой выполняются граничное условие второго рода. Коэффициенты разложения  $a_i$  - находятся согласно алгоритма Полака - Рибьера [3] при известных  $k^{(0)}, c^{(0)}, b^{(0)}$ . Суть алгоритма заключается в следующем: пусть необходимо найти вектор  $z_0$  при котором функционал  $L(z_0)$  принимает минимальное значение,  $z_0$  - вектор направление. Процесс нахождения  $z_0$  производится по следующему алгоритму:

шаг 1. Выбрать  $z_0$ , если  $L(z_0) = 0$ , то поиск прекращается. В противном случае переходит к шагу 2.

шаг 2. положить  $i = 0$  и

$$\bar{g}_0 = \bar{l}_0 = - \text{grad } L^0(z_0)$$

т.е. выбирается направление наискорейшего убывания функционала.

шаг 3. Вычислить такое число  $\lambda_i > 0$ , чтобы

$$L^0(z_i + \lambda_i \bar{l}_i) = \min \{ L^0(z_i + \lambda_i \bar{l}_i) \mid \lambda_i > 0 \}$$

шаг 4. Положить

$$\bar{z}_{i+1} = \bar{z}_i + \lambda_i \bar{l}_i.$$

шаг 5. Вычислить

$$\text{grad } L^0(z_{i+1})$$

шаг 6. Если  $\text{grad } L^0(z_{i+1}) = 0$ , то вычислительный процесс останавливается, иначе положить

$$\bar{g}_{i+1} = - \text{grad } L(z_{i+1}),$$

$$\bar{l}_{i+1} = \bar{g}_{i+1} + \gamma_i \bar{l}_i,$$

$$\gamma_i = \frac{(\bar{g}_{i+1} - \bar{g}_i, \bar{g}_{i+1})}{(\bar{g}_i, \bar{g}_i)}$$

и перейти к шагу 3. В программе вычисление  $\lambda_i$  реализовано методом параболической аппроксимизации, после нахождения удачной тройки чисел с использованием метода деления пополам [4,3]. Чтобы избежать накопление ошибок, алгоритм предлагает восстанавливать через каждые  $k > p + 1$  итераций.

После нахождения коэффициентов разложение приближенного решения становится известным первое приближение напорной функции. Затем команда передается к 3 этапу, где производится процесс вычисления следующего приближения коэффициента фильтрации.

**3 этап.** Вычисление следующего приближение коэффициента фильтрации  $k^{(1)} = k^{(1)}(x, y, c^{(1)}, b^{(1)})$  производится из дополнительных условий (2) при известных коэффициентах разложения  $a_i^{(0)}$ .

$$L_2(k^{(1)}, c^{(1)}, b^{(1)}) = \sum (H_n^{(j)} - h_i^e)^2 + \alpha \sum (k^{(j)} - k_i^e)^2, \quad (10)$$

где  $j$  - номер итерации,  $h_i^e, k_i^e$  - данные ОФР.

После 3 этапа проверяется выполнение условие

$$\max | (H_n^{(j)}(x_i, y_i) - h_i^e) / h_i^e | < \varepsilon, \quad (11)$$

где  $\varepsilon$  - заданное малое число, согласованное с точностью определения экспериментальных данных. Если условие (11) удовлетворяется, то счет останавливается и задача параметрической идентификация завершена. В противном случае поиск следующего приближения продолжается и управление передается ко 2 этапу и так далее.



Здесь следует отметить, что для минимизации положительно определенных, выпуклых функционалов целесообразнее использовать метод сопряженных градиентов [ 3 ]. Такой подход численно более устойчив. Достоверность предложенного алгоритма проверена на тестовом примере. В качестве области фильтрации принят параллелограм со сторонами

$$0.096 x + 0.049 y = 1, \quad (x,y) \in \Gamma_1.$$

$$0.09 x + 0.36 y = 0, \quad (x,y) \in \Gamma_2.$$

$$0.096 x + 0.049 y = 0, \quad (x,y) \in \Gamma_3.$$

$$0.09 x + 0.36 y = -2, \quad (x,y) \in \Gamma_4.$$

со значениями функции напора на границах

$$k \partial_n H = 0, \quad (x,y) \in \Gamma_1.$$

$$H(x,y) = 1, \quad (x,y) \in \Gamma_2.$$

$$k \partial_n H = 0, \quad (x,y) \in \Gamma_3.$$

$$H(x,y) = -2. \quad (x,y) \in \Gamma_4. \quad (12)$$

Внутри области фильтрации заданы восемь точек с координатами

$$x_i = i-1; \quad y_i = -(-1 + 0.09 x_i) / 0.36, \quad i = \overline{1, 8}.$$

в которых даны точные значения напорной функции.

Аналитическое выражение коэффициента фильтрации известна согласно формуле (5), где постоянные параметры принимают следующее значение:

$$k_0 = 0.9, \quad b = -0.33, \quad c = 0.8. \quad (13)$$

Согласно изложенного алгоритма параметрической идентификации при  $\varepsilon = 0.03$  были получены следующие значения параметров коэффициента фильтрации:

$$k_0 = 0.933739, \quad b = -0.339292, \quad c = 0.908631.$$

При этом отклонение функции напора от точного значения вдоль границы  $\Gamma_2$  составило в среднем  $\Delta H_{\text{ср.}} = 8\%$ , и  $\Delta H_{\text{мин.}} = 0.003\%$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джаныбеков Ч., Джаманбаев М.Дж., Бекболотов Д. Методы фильтрационных расчетов в слоистых средах.-Фрунзе:Илим,1983.-144с.

2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений в частных производных. -М.:Наука,1968.-260с.
  3. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единный подход: Пер. с англ.- М.: Мир, 1974 .- 376с.
  4. Джаманбаев М.Дж. Методы решения и идентификации параметров математической модели процессов переноса. Бишкек, Илим,1996 . 121 с.
-

УДК

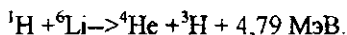
## СЦИНТИЛЛЯТОР ДЛЯ РЕГИСТРАЦИИ НЕЙТРОНОВ

**Р. Т. Айтматова, М. М. Кидибаев, Т. С. Королева, К. Мусаев**

Проблемы организации экспериментов по неупругому рассеянию нейтронов (при анализе структуры сверхпроводников, фазовых переходов, структуры фуллеренов, молекул ДНК, квантового туннелирования, решеточных мод) связаны с разработкой надежных высокоэффективных детекторов нейтронов. В качестве таких детекторов исторически первыми применялись детекторы на основе газовых пропорциональных счетчиков.

Однако в последние годы все большее распространение получают сцинтилляционные детекторы как инструмент в экспериментах по нейтронному рассеянию [1,2]. Такие детекторы содержат сцинтилляционный кристалл, состыкованный с фотоэлектронным умножителем непосредственно или через волоконно-оптический тракт. Создание таких детекторов связано с учетом целого ряда факторов. Это прежде всего зависимость эффективности регистрации нейтронов от их энергии, чувствительность (нечувствительность) к гамма-излучению, собственный шум, пространственное разрешение и геометрия детектора, временная стабильность, простота обслуживания и стоимость.

Эксперименты по рассеянию нейтронов обычно связаны с нейтронами, имеющими энергию от 1 МэВ до 100 эВ. Для этого диапазона энергий прямая ионизация атомов нейтронами пренебрежимо мала, поэтому детектирование нейтронов осуществляют с использованием реакции захвата нейтронов. Наиболее удобной представляется реакция захвата нейтронов



В связи с этим предпочтение отдается сцинтилляционным материалам, содержащим литий (радионуклид  ${}^6\text{Li}$ ). Достаточно широкое распространение получают кристаллы  $\text{ZnS-Ag-}{}^6\text{Li}$  и содержащие литий стекла  $\text{GS20(Ce)}$  [2]. Первые имеют длительность сцинтилляции 2мкс, вторые 70нс. Известны также кристаллические сцинтилляторы на основе  $\text{LiF(W)}$  и  $\text{LiI}$ , данные для которых [3,4] приведены в сравнении с данными для предложенного нами сцинтиллятора на основе  $\text{LiF(U,Cu)}$ :

	LiF(W)	LiI(Eu)	LiF(U,Cu)
Длина волны излучения $\lambda_m$ (нм)	430	470	525
Константа затухания (мкс)	40	1,4	40
Коэффициент преломления (для $\lambda_m$ )	1,4	1,96	1,4
Гигроскопичность	нет	да	нет
Плотность (кг/м <sup>3</sup> )	2640	4080	2640
Эффективный атомный номер	8,2	52	8,2
Световыход относительно NaI-Tl(%)	3,5	35	5,2
Коэффициент поглощения тепловых нейтронов (см <sup>-1</sup> )	4,40	1,46	4,40
Температура плавления (К)	1133	719	1133

Предлагаемые нами сцинтилляторы [5,6] на основе  ${}^6\text{LiF-U,Cu}$  и  ${}^6\text{LiF-U,Ti}$  пригодны для регистрации нейтронов в экспериментах по рассеянию (нейтронов). Они негигроскопичны, обладают малыми потерями при светосборе (из-за низкого в сравнении с  $\text{LiI}$  коэффициента преломления), достаточно высоким коэффициентом поглощения тепловых нейтронов, повышенным (в сравнении с  $\text{LiF-W}$ ) световыходом сцинтилляций (для лучших образцов при работе в импульсном режиме с широкополосным электронным трактом он достигал 10-13% относительно  $\text{NaI-Tl}$ ) и достаточно высокой термостойкостью.

Сцинтилляторы на основе  ${}^6\text{LiF(U,Cu)}$  наиболее пригодны для работы в сочетании с фотоэлектронными умножителями с мультищелочными фотокатадами. Сцинтиллятор на базе  ${}^6\text{LiF(U,Ti)}$  подходит для работы с ФЭУ с сурьмяно-цезиевыми фотокатадами, однако, примесь титана, вызывая появление синей полосы (410 нм), снижает световыход в полосе излучения урановых центров свечения. В результате сцинтилляционная эффективность составов с активирующей примесью титана оказывается в ~2-3 раза ниже, чем в случае медного активатора.

Сцинтилляторы  ${}^6\text{LiF(U,Cu)}$  имеют невысокую расчетную эффективность при регистрации тепловых нейтронов (по вторичному альфа-излучению) при работе в импульсном, счетном режиме из-за того, что световыход коротких компонент сцинтилляций очень мал (десятые доли процента относительно  $\text{CsI(Tl)}$ ). Однако при работе сцинтилляционного детектора в токовом режиме, обеспечивающем регистрацию всех компонент высвечивания, включая наиболее интенсивные компоненты микросекундного диапазона (300 мкс и выше), расчетная эффективность регистрации тепловых нейтронов возрастает на один-два порядка и становится приемлемой для практики. Для повышения эффективности регистрации рассеянных нейтронов целесообразно использовать кристаллы  ${}^6\text{LiF(U,Me)}$  в сочетании с радиаторами в виде пластинок из гидрида лития, содержащими в большом количестве водород и обеспечивающими замедление регистрируемых нейтронов до тепловых энергий.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Charkina T.A., Eidelman L.G. et al. Book of Abstracts Int conf. on Inorganic Scintillators and Their Application. Netherlands, Delft, 1996, p.161.
2. Rhodes N.J., Johnson N.W. The role of inorganic scintillators in neutron detector technology. Proc. Int Conf on Inorganic Scintillators and Their Application. Netherlands, Delft, 1996, p.73-83.
3. Charkina T.A., Eidelman L.G. et al. Book of Abstracts Int conf. on Inorganic Scintillators and Their Application. Netherlands, Delft, 1996, p.105.
4. Kidibaev M., Musaev K., Koroleva T.S. et al. Scintillation detectors for thermal neutron and neutrino registration on the basis LiF-U. Book of Abstracts Int.Conf.on Luminescent Detectors and Transformers of Ionizing Radiation. Ustron, Poland, 1997, p. 277.
5. Kidibaev M., Koroleva T.S., Shulgin B.V. et al. Spectroscopy of radiation defects in uranium activated LiF crystals. Book of Abstracts of Int.Conf. on f-Elements, Paris, 1997, p.343.

**СЧЕТНАЯ СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ  
УРАВНЕНИЙ И ЕЕ СВЯЗЬ С ЛИНЕЙНЫМИ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ**

**А. Керимбеков, А. К. Эсенканова**

При решении задачи теории оптимального управления системами с распределенными параметрами во многих случаях для построения оптимального управления приходится решать счетную систему линейных алгебраических уравнений [1, 2], где число неизвестных не совпадает с порядком системы. Поэтому вопросы разрешимости счетной системы линейных алгебраических уравнений и алгоритм построения ее решения привлекают внимание многих исследователей.

В статье приведены результаты, полученное при исследовании счетных линейных систем во взаимосвязе с решениями линейных дифференциальных уравнений первого и второго порядков.

**§ 1. Связь счетных линейных систем с решением задачи Коши**

Рассмотрим задачу Коши

$$y' = ay, \quad y(x_0) = y_0 \quad (1.1)$$

где параметр  $a$  изменяется от  $-\infty$  до  $\infty$ . При фиксированных значениях  $a$ ,  $x_0$  и  $y_0$  через точку  $(x_0, y_0)$  проходит единственная интегральная кривая

$$y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)} \quad (1.2)$$

К интегральной кривой (1.2) в точке  $(x_0, y_0)$  проведем касательную, угловой коэффициент которой вычисляется по формуле

$$k = y'(x_0) = ay(x_0) = ay_0$$

Уравнение касательной имеет вид

$$\bar{y} - y_0 = k(x - x_0) \quad (1.3)$$

где  $x, \bar{y}$  - текущие координаты касательной.

Пусть теперь параметр  $a$  изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ . В этом случае образуется семейство задач вида (1.1) и касательные (1.3), проведенные в точке  $(x_0, y_0)$  к каждой интегральной кривой (1.2), образуют пучок прямых, проходящих через точку  $(x_0, y_0)$ . Угловой коэффициент  $k$  является функцией от параметра  $a$  и изменяется по линейному закону

$$k = k(a) = y_0 \cdot a \quad (1.4)$$

Заметим, что при  $a \rightarrow \pm\infty$  касательные стремятся к прямой  $x = x_0$ .

Согласно формуле (1.4) легко видеть, что между элементами семейства задач Коши (1.1) и семейства касательных, проходящих через точку  $(x_0, y_0)$ , существует взаимнооднозначное соответствие.

Установленная связь счетных линейных систем

$$-k(a)x + \bar{y} = y_0 - r(a)x_0 \quad (1.5)$$

с решениями семейства задач Коши (1.1) может быть использована при исследовании вопросы разрешимости произвольно заданной счетной линейной системы. Например, если заданная система

$$a_n x + b_n y = c_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

“погружается” в линейную систему (1.5), то она имеет единственное решение  $(x_0, y_0)$ .



## § 2. Связь счетных линейных систем с решением краевой задачи

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$U_t = aU_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t \geq t_0 \quad (2.1)$$

с начальным условием

$$U(t_0, x) = \varphi(x), \quad 0 < x < 1 \quad (2.2)$$

и с граничными условиями

$$U(t, 0) = 0, \quad U(t, 1) = 0, \quad t \geq t_0 \quad (2.3)$$

Краевая задача (2.1)-(2.3) имеет единственное (быть может обобщенное) решение

$$U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = n\pi$$

где  $U_n(t)$  определяется как решение задачи Коши

$$U'_n(t) = -a\lambda_n^2 U_n(t), \quad U_n(t_0) = \varphi_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

(Здесь  $\varphi_n$  - коэффициенты Фурье функции  $\varphi(x)$ ). При фиксированном  $n$  задача Коши (2.4) имеет единственное решение

$$U_n(t) = \varphi_n e^{-a\lambda_n^2(t-t_0)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

которое в точке  $(t_0, \varphi_n)$  имеет касательную

$$-k_n t + \bar{U}_n = \varphi_n - k_n t_0 \quad (2.5)$$

с угловым коэффициентом

$$k_n = k_n(a) = -a\lambda_n^2 \varphi_n$$

Далее, если  $a$  считать как параметр, изменяющийся от  $-\infty$  до  $+\infty$ , то через каждую точку  $(t_0, \varphi_n)$  проходит пучок прямых вида (2.5), которую обозначим через  $\Pi_n$ . При изменении  $n = 1, 2, 3, \dots$  на прямой  $t = t_0$  будут расположено счетное число пучков  $\{\Pi_n\}$ , что равносильно существованию счетного числа счетных линейных систем алгебраических уравнений.

На основе свойства, установленного в § 1, можно сделать вывод: если счетное число систем счетных линейных уравнений “погружается” в линейную систему вида (2.5), то каждая система счетных линейных уравнений однозначно разрешима и координаты точки  $(t_0, \varphi_n)$  будут ее решением.

Имеет место более интересный результат:

**Предложение 2.1.** Из каждого пучка  $\Pi_n$  можно выбрать по одной прямой, которые пересекаются в одной точке.

**Доказательство:** Поскольку при фиксированном  $n$  параметр  $a$  изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ , что можно выбрать такие значения  $a$ , что будут выполняться равенства

$$a_1 \lambda_1^2 = a_2 \lambda_2^2 = \dots = a_n \lambda_n^2 = \dots = b - \text{const}$$

В этом случае существует задача Коши

$$U'_n(t) = -bU_n(t), \quad U_n(t_0) = \varphi_n$$

решением которой будет функция

$$U_n(t) = \varphi_n e^{-b(t-t_0)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.6)$$

Касательная, проведенная к интегральной кривой (2.6) в точке  $(t_0, \varphi_n)$ , имеет угловой коэффициент

$$k_n(a_n) = -b\varphi_n \quad (2.7)$$

Тогда уравнение касательной имеет вид

$$b\varphi_n t + \bar{U}_n = \varphi_n + b\varphi_n t_0$$

Покажем, что система

$$\left. \begin{aligned} b\varphi_n t + \bar{U}_n &= \varphi_n + b\varphi_n t_0 \\ b\varphi_k t + \bar{U}_k &= \varphi_k + b\varphi_k t_0 \end{aligned} \right\}$$

где  $k \neq n$ , имеет единственное решение. В самом деле, непосредственным вычислением находим

$$t^* = t_0 - \frac{1}{b}, \quad \bar{U}_n^*(t) = 0$$

Таким образом, прямые имеющие угловой коэффициент (2.7) пересекаются в точке  $(t^*, \bar{U}_n^*)$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М., Наука, 1978
2. Керимбеков А. Математические методы оптимального управления электромагнитными колебаниями. Бишкек, из-во КГПУ, 1998
3. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1975
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., Наука, 1972

**УЛЬТРАКОМПАКТНЫЕ И  $\kappa_0$ -ОГРАНИЧЕННЫЕ  
ПРОСТРАНСТВА****Б. А. Болжиев**

Данная статья содержит полные доказательства результатов автора, опубликованных в тезисах [5], а также некоторые новые результаты, касающиеся поведения тесноты при произведении топологических пространств.

Пусть  $\beta\omega$ , как всегда, является стоун-чеховским расширением дискретного пространства натурального ряда чисел  $\omega$  и  $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$ -его нарост.

Множество  $\beta\omega$  мы будем интерпретировать как множество всех ультрафильтров, определенных на  $\omega$ , причем  $\omega^*$  в точности состоит из всех нетривиальных ультрафильтров [3]. Напомним некоторые определения [4].

Топологическое пространство  $(X, \tau)$  называется  $p$ -компактным, где  $p \in \omega^*$ , если для всякой последовательности  $p \in \{x_n, n \in \omega\} \subset X$  найдется точка  $x$  такая, что для произвольной окрестности  $W$  точки  $x$  множество  $\{n, x_n \in W\}$  принадлежит ультрафильтру  $p$ . В этом случае говорят, что последовательность  $\{x_n, n \in \omega\}$  обладает  $p$ -предельной точкой  $x$  или последовательность  $\{x_n, n \in \omega\}$   $p$ -сходится к точке  $x$  и обозначается следующим образом:  $x = p\text{-}\lim x_n$ .

В работе [8] В.Сакс определяет ультракомпактность следующим образом: топологическое пространство  $(X, \tau)$  называется ультракомпактным, если для произвольного  $p \in \omega^*$  всякая последовательность обладает  $p$ -предельной точкой. И.Юхас и В.Сакс доказали, что в классе регулярных пространств ультракомпактность эквивалентна  $\aleph_0$ -ограниченности, где  $\aleph_0$ -ограниченность определяется следующим образом:  $(X, \tau)$  называется  $\aleph_0$ -ограниченным, если замыкание любого счетного множества является компактом. Таким образом, из вышесказанного ясным образом следует, что сепарабельное регулярное ультракомпактное пространство является компактом. Не случайно В.Сакс поставил следующую проблему [8]: существует ли хаусдорфово сепарабельное ультракомпактное некомпактное пространство? Очевидно, если такое пространство существует, то оно не будет  $\aleph_0$ -ограниченным и, следовательно, в классе хаусдорфовых пространств ультракомпактность не будет эквивалентна  $\aleph_0$ -ограниченности. Наша цель заключается в том, чтобы показать, что такое пространство существует.

Пусть  $(X, \tau)$ -топологическое пространство. Следуя А.В. Архангельскому [1] топологию  $\tau$  на множестве  $X$  усилим до топологии счетной тесноты  $\tau_{\aleph_0}$  следующим образом:  $x \in [A]_{\tau_{\aleph_0}}$ , где  $A \subset X$  в том и только в том случае, когда найдется счетное подмножество  $B \subset A$  такое, что  $x \in [B]_{\tau}$  (замыкание берется в топологии  $\tau$ ). Итак, мы построили топологическое пространство  $(X, \tau_{\aleph_0})$ . Из определения этой топологии следует, что операторы замыканий  $[ ]_{\tau}$  и  $[ ]_{\tau_{\aleph_0}}$  совпадают на счетных множествах. Таким образом, если исходное топологическое пространство  $(X, \tau)$  будет сепарабельным со всюду плотным счетным подмножеством

$D \subset X$ , то сепарабельным также будет  $(X, \tau_{\aleph_0})$  и  $D$  будет в нем также счетным всюду плотным подмножеством. Следовательно, если в качестве  $(X, \tau)$  взять сепарабельный компакт несчетной тесноты, то его "счетная" модификация  $(X, \tau_{\aleph_0})$  в силу счетности тесноты будет, естественно, уже некомпактным хаусдорфовым пространством, а так как их топологии совпадают на счетных множествах и всякий компакт является ультракомпактным пространством, то  $(X, \tau_{\aleph_0})$  также является ультракомпактным сепарабельным пространством. Суммируя вышеизложенное, мы приходим к следующему результату:

**Теорема 1.** Пусть топологическое пространство  $(X, \tau)$  является сепарабельным компактом несчетной тесноты. Тогда пространство  $(X, \tau_{\aleph_0})$  является сепарабельным хаусдорфовым ультракомпактным некомпактным пространством.

В качестве пространства  $(X, \tau)$  в теореме 1 можно взять произвольное компактное хаусдорфово расширение секвенциального пространства  $E$  индекса секвенциальности 2 или пространства  $X_{FU}$  [2]. Из этой теоремы вытекает.

**Следствие 2.** В классе хаусдорфовых пространств ультракомпактность и  $\aleph_0$ -ограниченность неэквивалентны.

Используя понятие  $p$ -предельной точки, А.П.Комбаров в работе [6] ввел понятие  $p$ -секвенциального пространства, которое обобщает понятие секвенциального пространства. Напомним, что пространство  $(X, \tau)$  называется  $p$ -секвенциальным [6], если для всякого незамкнутого множества  $M \subset X$  найдется точка  $x \in [M] \setminus M$  и последовательность  $\{x_n : n \in \omega\} \subset M$  такие, что  $x = p\text{-}\lim x_n$ . Определим на произвольном топологическом пространстве  $(X, \tau)$  топологию  $\tau_p$ , которую мы будем называть  $p$ -секвенциальным лидером пространства  $(X, \tau)$ . Подмножество  $O \subset X$  принадлежит  $\tau_p$  тогда и только тогда, когда из того, что  $x \in O$  и  $x = p\text{-}\lim x_n$  для некоторой последовательности  $\{x_n : n \in \omega\}$  следует, что найдется  $W \in \tau$  для которого выполняется:  $\{x_n : n \in \omega\} \subset W$ . Такие множества мы будем называть  $p$ -секвенциально открытыми. Таким образом, элементы топологии  $\tau_p$  суть в точности все  $p$ -секвенциально открытые множества.

Дополнения до  $r$ -секвенциально открытых множеств будем называть  $r$ -секвенциально замкнутыми. Следовательно, замкнутые множества в  $(X, \tau_r)$  состоят из всех  $r$ -секвенциально замкнутых множеств, которые, как легко видеть, можно описать еще таким образом: подмножество  $M \subset X$  называется  $r$ -секвенциально замкнутым, если для произвольной последовательности  $\{x_n: n \in \omega\} \subset M$  и всякой точки  $x$  такой, что  $x = r\text{-}\lim x_n$  выполнено:  $x \in M$ . Так как всякое открытое множество является  $r$ -секвенциально открытым, то  $\tau \subset \tau_r$ . Справедливо следующее

**Предложение 3.** Пространство  $(X, \tau_r)$  является  $r$ -секвенциальным пространством.

Если  $M \subset X$  в пространстве  $(X, \tau)$ , то определим  $(M)^1$  как множество таких точек  $x$ , для которых найдется последовательность  $\{x_n: n \in \mathbb{N}\} \subset M$  такая, что  $x = r\text{-}\lim x_n$ , т.е.  $(M)^1$  получается путем добавления всех  $r$ -предельных точек для  $M$ . Положим  $(M)^2 = ((M)^1)^1$  и так далее по индукции можно определить  $(M)^p$  для произвольного  $p \in \omega$ . Теперь предположим, что для всех ординалов  $\gamma$ , меньших чем ординал  $\alpha < \omega_1$ , мы определим множества  $(M)^\gamma$ . Если  $\alpha$ -предельный ординал, то полагаем  $(M^\alpha) = \cup \{(M)^\gamma: \gamma < \alpha\}$ , если же  $\alpha$ -изоливоранный ординал, т.е.  $\alpha = \alpha_0 + 1$  для некоторого ординала  $\alpha_0$ , то положим  $(M)^\alpha = ((M)^{\alpha_0})^1$ . Таким образом, для всех теперь  $(M)^\alpha = U \{(M)^\beta: \alpha < \omega_1\}$ . Из свойств ординала  $\omega_1$  непосредственно следует  $(M)^\omega = ((M)^\omega)^1$ . Нетрудно убедиться в справедливости следующего предложения.

**Предложение 4.** Пусть  $(X, \tau)$   $r$ -компактное топологическое пространство. Тогда  $(X, \tau_r)$  является  $r$ -секвенциальным  $r$ -компактным пространством.

**Предложение 5.** Теснота  $r$ -секвенциального пространства счетна. Справедливость этого предложения следует также из свойств ординала  $\omega_1$  [3].

Известно [4], что произведение  $r$ -компактных пространств в произвольном числе является  $r$ -компактным. В статье [7] А.П. Комбаров доказал следующую теорему: счетное произведение регулярных  $r$ -

компактных  $r$ -секвенциальных пространств является  $r$ -компактным  $r$ -секвенциальным пространством. Естественно, возникает вопрос: насколько существенна регулярность в этой теореме? Ниже мы докажем, что регулярность существенна в этой теореме, а именно, будут построены два хаусдорфовых  $r$ -компактных  $r$ -секвенциальных пространства  $T_{\aleph_0}^p$  и  $T_c^p$  такие, что теснота пространства  $T_{\aleph_0}^p$  и  $T_c^p$  несчетна и, следовательно, в силу предложения 5 это пространство не будет  $r$ -секвенциальным.

Пусть  $T_{\aleph_0}^p$  ( $T_c^p$ ) получается из дизъюнктивной счетной (континуальной) топологической суммы пространств, каждое из которых гомеоморфно пространству  $\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \omega \right\}$  в естественной топологии, и склеенных в предельных точках в одну точку. Таким образом, мы получили, так называемые, счетный и континуальный веера Фреше-Урысона, которые также являются  $r$ -секвенциальными пространствами. Как показано в [2], произвольное компактное расширение  $T_{\aleph_0}$  ( $T_c$ ) имеет несчетную тесноту, а также произведение  $T_{\aleph_0} \times T_c$  имеет несчетную тесноту. Пусть теперь  $bT_{\aleph_0}$  и  $bT_c$  произвольные компактные расширения пространств  $T_{\aleph_0}$  и  $T_c$  соответственно, а  $T_{\aleph_0}^p$  и  $T_c^p$  их  $r$ -секвенциальные лидеры. Пространства  $T_{\aleph_0}$  и  $T_c$  являются подпространствами пространств  $T_{\aleph_0}^p$  и  $T_c^p$  соответственно и, следовательно, теснота пространства  $T_{\aleph_0}^p \times T_c^p$  несчетна, т.е. это автоматически приводит к тому, что  $T_{\aleph_0}^p \times T_c^p$  не является  $r$ -секвенциальным, хотя каждый из сомножителей, в силу предложения 4, является  $r$ -компактным  $r$ -секвенциальным пространством. Итак, мы пришли к следующему результату.

**Теорема 6.** Произведение двух хаусдорфовых  $r$ -компактных  $r$ -секвенциальных пространств  $T_{\aleph_0}^p \times T_c^p$  не является  $r$ -секвенциальным пространством.

А.В. Архангельский в статье [2] разработал критерии, позволяющие узнать поведение тесноты при топологическом произведении и для счетного случая им построены примеры двух пространств счетной тесноты, а именно  $T_{\aleph_0}$  и  $T_c$ , теснота произведений которых, как мы уже упоминали, является несчетной. Ниже будут построены для каждого регулярного кардинала  $\tau$  топологические пространства  $Z_\tau$  и  $T_\tau$  тесноты  $\tau$  каждая,



причем теснота произведения этих пространств будет больше  $\tau$ . Для построения этих примеров, необходимо будет построить пространство  $Z_\tau$  тесноты  $\tau$  и  $\tau$ -сингулярное в некоторой своей точке [2]. Предварительно напомним некоторые определения из [2].

**Определение 1.** Пусть  $\varepsilon$ -некоторое семейство семейств подмножеств пространства  $X$  и  $\tau$ -кардинал.

Скажем, что  $\varepsilon$  -  $\tau$ -отделено от точки  $x \in X$ , если каково бы ни было  $\wp \subset \varepsilon$ , для которого  $|\wp| \leq \tau$ , можно так выбрать  $A(\xi) \in \xi$  для каждого  $\xi \in \wp$ , чтобы было выполнено  $x \notin \left[ \bigcup \{A(\xi); \xi \in \wp\} \right]$ .

**Определение 2.** Пусть  $X$ -топологическое пространство,  $x \in X$ ,  $\tau$ -кардинал и  $\wp_x$ -семейство центрированных семейств подмножеств множества  $X$  со следующими свойствами:

а) для каждого  $\xi \in \wp_x$  существует  $A \in \xi$  такое, что  $|A| \leq \tau$ .

б) какова бы ни была окрестность  $O_x$  точки  $x$ , найдутся  $\xi \in \wp_x$  и  $A \in \xi$  для которых  $A \subset O_x$ .

в)  $\wp_x$ - $\tau$ -отделено от  $x$ .

Тогда семейство  $\wp_x$  называется  $\tau$ -сингулярным в точке  $x$  семейством на  $X$ .

Пусть  $\tau$ -бесконечный регулярный кардинал,  $\omega_\alpha$ -начальное порядковое число мощности  $\tau$  и  $\{X_\gamma; \gamma \in \omega_\alpha\}$  семейство попарно непересекающихся множеств мощности  $\tau$  каждое. Через  $A$  обозначим дизъюнктивное объединение множеств  $\{X_\gamma; \gamma \in \omega_\alpha\}$ . Пусть  $\theta$ -какой-нибудь объект, не принадлежащий  $A$ . Теперь на множестве  $Z = \{\theta\} \cup A$  введем топологию  $\tau_\alpha$ . Произвольное  $O \subset A$  принадлежит  $\tau_\alpha$ . Если же  $V \ni \theta$ , то  $V \in \tau_\alpha$  в том и только в том случае, если  $|V \setminus X_\gamma| < \tau$  для каждого  $\gamma \in \omega_\alpha$ . Таким образом, топология  $\tau_\alpha$  определена однозначно. Теперь покажем, что топологическое пространство  $(X, \tau_\alpha)$  является  $\tau$ -сингулярным в точке  $\theta$ . Для этого построим в  $(Z, \tau_\alpha)$  семейство,  $\tau$ -сингулярное в точке  $\theta$ . Пусть  $S$ -множество всех  $\omega_\alpha$ -последовательностей, т.е. в данном случае, множество всех отображений из  $\omega_\alpha$  во множество  $Z$ , удовлетворяющих условию: для

каждого  $s \in S$  выполнено  $s(\gamma) \in X_\gamma$  при всех  $\gamma \in \omega_\alpha$ . Очевидно, что мощность множества не меньше  $\tau$ , а именно, равна  $2^\tau$ . Для произвольного  $s \in S$  построим центрированное семейство множеств  $P_s$  следующим образом:  $P_s = \{D_\beta^s, \beta \in \omega_\alpha\}$ , где  $D_\beta^s = \{\gamma \in \omega_\alpha : \beta \leq \gamma \in \omega_\alpha\}$ . Ясно, что множество  $P_s$  образует центрированное семейство множеств. Мы утверждаем, что семейство  $\wp_\theta = \{P_s : s \in S\}$  является  $\tau$ -сингулярным в точке  $\theta$ . В силу регулярности кардинала  $\tau$  и определения топологии  $\tau$  следует, что семейство  $\wp_\theta$  удовлетворяет также условию б) определение 2 и из определения  $P_s$  получаем, что  $\wp_\theta$  удовлетворяет также условию а) определение 2. Осталось показать  $\tau$ -отдельность семейства  $\wp_\theta$ . Пусть  $\wp' \subset \wp_\theta$  произвольное подсемейство мощности  $\tau$ .  $\wp' \subset \{P_s : s \in S'\}$ ,  $S' \subset S$ ,  $|S'| = \tau$  для некоторого  $S' \subset S$ . Вполне упорядочим множество  $S'$  так, чтобы оно имело порядковый тип  $\omega_\alpha$ , так что можно положить  $S' = \{\gamma_\beta : \beta \in \omega_\alpha\}$ . Мы утверждаем, что  $\bigcup \{D_\gamma^s : \gamma \in \omega_\alpha\} \notin \theta$ .

Действительно, в силу регулярности  $\omega_\alpha$  получаем:

$$\left\{ \beta : D_\gamma^s \cap X_\beta \neq \emptyset \right\} \langle \tau \text{ для произвольно фиксированного } \gamma \in \omega_\alpha.$$

Следовательно, из того что  $|X_\beta \cap D_\gamma^s| \leq 1$  для любого  $\gamma \in \omega_\alpha$  и любого  $\beta \in \omega_\alpha$  следует, что  $\left[ \bigcup \{D_\gamma^s, \gamma \in \omega_\alpha\} \cap X_\beta \right] \langle \tau$  для любого  $\beta \in \omega_\alpha$ .

Таким образом, можно утверждать, что  $V = \{\theta\} \cup \left\{ \bigcup \{X_\beta \setminus [ \bigcup \{D_\gamma^s : \gamma \in \omega_\alpha\} ], \beta \in \omega_\alpha \} \right\}$  является окрестностью  $\theta$ , не пересекающейся с  $\left[ \bigcup \{D_\gamma^s : \gamma \in \omega_\alpha\} \right]$ .

Что и требовалось доказать.

Теперь, используя конструкцию из [2], мы построим пространство  $W$  тесноты  $\tau$  такое, что теснота пространство  $Z \times W$ , будет несчетной.

Рассмотрим дизъюнктивное семейство множеств  $\{T_\beta : \beta \in S\}$ , где  $S$  было определено ранее, причем каждое  $T_\beta$  имеет мощность равную  $\tau$ . Пусть теперь для каждого  $\beta \in \omega_\alpha$  символ  $\beta'$  будет обозначать какую-нибудь биекцию между множеством  $\{\gamma : \gamma \in \omega_\alpha\}$  и множеством  $T_\beta$ . Тогда из множества

$\beta(\omega_\alpha)$  посредством отображения  $\beta'' \circ \beta^{-1}$  мы получим копию центрированного семейства множеств  $P_\beta$  на множестве  $T_\beta$ . Пусть это центрированное семейство множеств на  $T_\beta$  будет обозначено через  $P'_\beta = \{D'_\gamma{}^\beta : \gamma \langle \omega_\alpha \rangle\}$ , где  $D'_\gamma{}^\beta$ -копия  $D_\gamma^\beta$  при отображении  $\beta'' \circ \beta^{-1}$ . Положим  $M = \cup \{T_\beta : \beta \in S\}$ . Пусть теперь  $O$ -любой объект, отличный от  $M$ . На множестве  $W = \{O\} \cup M$  введем топологию  $\sigma$  следующим образом. Если  $C \subset M$ , то открыто в  $\sigma$ .

Базу же окрестностей точки  $O$  в  $\sigma$  образуют множества вида:

$$\{O\} \cup \left\{ \cup \left\{ D'_{\gamma(\beta)}{}^\beta : \gamma \langle \omega_\alpha \rangle, \beta \langle \omega_\alpha \rangle \right\} \right\}.$$

Топологическое пространство  $(W, \sigma)$  является искомым.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.В. Архангельский., О бикомпактах, которые удовлетворяют условию Суслина наследственно. Теснота и свободные последовательности., ДАН СССР 199 (1971), 1227-1230.
2. А.В. Архангельский., Спектр частот топологического пространства и операция произведения.- Тр. Моск. матем. об-ва 40 (1979), 171-206.
3. А.В. Архангельский, В.И. Пономарев. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. "Наука". 1974 г..
4. Bernstein A.R. A new kind of compactness for topological spaces. Fund. Math. 1970.-V.66.-p. 185-193.
5. Б.А. Болжиев. О секвенциальности и компактности по ультрафильтрам: Бакинская международная топологическая конференция: Тезисы-Баку.1987.-Часть 2.-С.48.
6. А.П. Комбаров. Об одной теории Стоуна. ДАН СССР.-1983.-Т.270, №1.-С.37-40.
7. А.П. Комбаров. О компактности и секвенциальности по множеству ультрафильтров., Вест.МГУ., Сер.Матем., Мех., 1985. №5,С.15-18.
8. V.Saks. Ultrafilters invariant in topological spaces. Trans. Amer. Math. Soc.-1978.-V.241.-p.79-97.

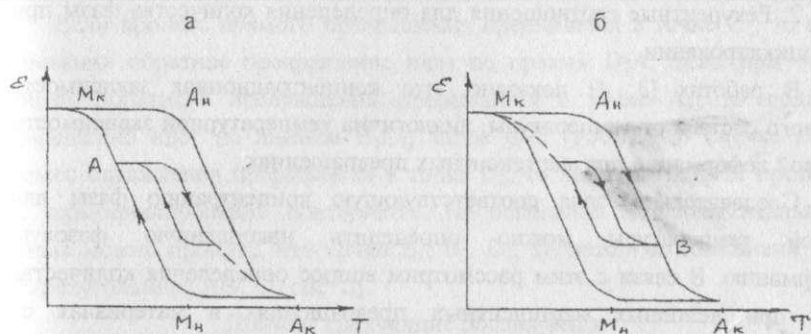
## ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА НАКОПЛЕНИЯ ФАЗ ПРИ ТЕРМОЦИКЛИРОВАНИИ С УЧЕТОМ НЕПОЛНЫХ МАРТЕНСИТНЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

С. Абдрахманов

1. Гистерезисные эффекты при полном и неполном мартенситных превращениях. Экспериментальные данные.

Известно, что разница в характеристических температурах прямого и обратного превращения приводит на диаграмме "деформация-температура" к гистерезисной петле [1].

Установлено [2], что в зависимости от режима термоциклирования можно получить две существенно различные гистерезисные кривые. При одних режимах термоциклирование, при прохождении полных мартенситных реакций приводит к стабилизации петли гистерезиса, и все петли гистерезиса, при неполном прохождении мартенситных реакций, лежат внутри этой установившейся петли гистерезиса.



**Рис. 1.** Петли гистерезиса с полным и неполным протеканием мартенситных реакций при прямом и обратном превращениях. Неполная петля начинается с нагревания (а) и с охлаждения (б).

При других режимах термоциклирования процесс накопления конечной фазовой деформации от цикла к циклу непрерывно увеличивается.

Пусть имеем установившуюся полную петлю гистерезиса.

При этом рассмотрим поведение материала с неполным протеканием мартенситных реакций в прямую и обратную сторону.

Опыт показывает, что если прервать мартенситную реакцию на некотором полуцикле охлаждения после накопления определенной фазовой деформации, например в точке А (рис. 1а), затем производить нагревание, то обратное превращение начинается при некоторой температуре, зависящей от накопленной фазовой деформации. При этом полное обратное превращение, как правило, заканчивается при одной и той же температуре  $A_n$ . Если же прервать процесс нагрева, не доведя температуру до  $A_n$ , а затем производить охлаждение, то прямое превращение начинается при некоторой температуре, зависящей от соотношения фаз аустенита и мартенсита. При этом гистерезисная петля завершается в точке А, где ранее был прерван процесс охлаждения (рис. 1а). Аналогично ведет себя материал, если неполная петля гистерезиса начинается с процесса прерывания нагревания, например в точке В (рис. 1б), и в этом случае процесс неполного термоциклирования замыкает петлю в точке В (рис. 1б).

2. Рекуррентные соотношения для определения количества фазы при термоциклировании.

В работах [3, 4] показано, что концентрационная зависимость фазового состава от температуры, аналогична температурной зависимости фазовой деформации при мартенситных превращениях.

Следовательно, зная соответствующую концентрацию фазы для данной температуры можно определить накопленную фазовую деформацию. В связи с этим рассмотрим вопрос определения количества фазы при неполных мартенситных превращениях в материалах со стабильной петлей гистерезиса. Гистерезисную кривую зависимости мартенситной фазы ( $\Phi_M$ ) от температуры ( $T$ ) схематизируем в виде четырехугольника ABCD (рис. 2). При этом очевидно, что абсциссы этих точек будут равны характеристическим температурам превращений ( $A_K$ ,  $M_H$ ,  $M_K$ ,  $A_H$ ), а ординаты равны количеству мартенситной фазы (нормированного к единице), соответственно в начале и конце фазового превращения.

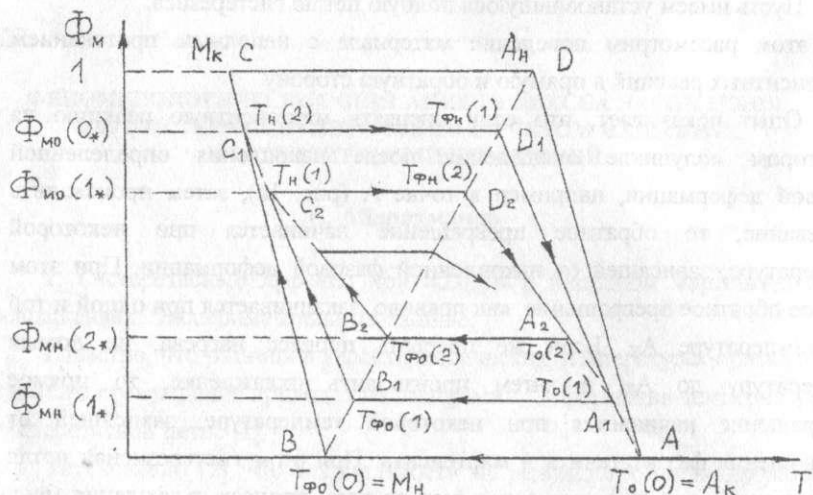


Рис. 2. Концентрационная зависимость мартенситной фазы от температуры; термоциклирование начинается с прямого мартенситного превращения.

Если процесс прямого превращения прерывается в точке  $C_1$ , то при нагревании обратное превращение идет по прямой  $D_1A$ . Если при этом процесс обратного превращения прерывается в точке  $A_1$ , то прямое превращение идет по линиям  $B_1C_1$ , затем  $C_1C$  (рис. 2). В случае если процесс охлаждения прерывается в точке  $C_2$ , то вышеописанный процесс при термоциклировании повторяется. На основании экспериментальных данных можно принять, что точки  $B_1, B_2, D_1, D_2$  лежат на диагонали  $BD$  четырехугольника  $ABCD$  (рис. 2)

Примем следующие обозначения:

- $T_0(i)$  - температура начала охлаждения в  $i$ -ом цикле  
 $T_H(i)$  - температура начала нагрева в  $i$ -ом цикле  
 $T_{Ф0}(i)$  - температура начала образования новой (дополнительной) фазы в  $i$ -ом цикле при охлаждении.  
 $T_{ФH}(i)$  - температура начала образования новой фазы в  $i$ -ом цикле при нагревании.  
 $\Phi_{M0}(i\bullet)$  - количество мартенситной фазы накопленной в  $i$ -ом цикле в процессе охлаждения перед нагреванием;  
 $\Phi_{MH}(i\bullet)$  - количество мартенситной фазы накопленной в  $i$ -ом цикле в процессе нагревания перед охлаждением. <sup>1)</sup>

Начальный этап охлаждения примем за нулевой цикл ( $i=0$ ). При этом абсциссы точек  $A$  и  $B$ , соответственно будут:  $T_0(0)=A_K$ ,  $T_{Ф0}(0)=M_H$ , а абсцисса и ордината точки  $D_1$  будет:  $T_{ФH}(1)$  и  $\Phi_{M0}(0\bullet)$  (рис. 2).

В случае, когда термоциклирование начинается с прямого мартенситного превращения, используя схематизированную диаграмму приведенную на рис. 2, можно получить следующие рекуррентные соотношения для  $i$ -го термоцикла:

$$\Phi_{M0}(i) = \Phi_{M0}((i-1)\bullet) \frac{T_{Ф0}(i) - T}{T_{Ф0}(i) - T_H(i)} - \Phi_{MH}(i\bullet) \frac{T_H(i) - T}{T_{Ф0}(i) - T_H(i)} \quad (1)$$

Здесь  $T_{Ф0}(i) \leq T \leq T_H(i)$ ,  $i=0, 1, \dots$ ;  $\Phi_{M0}(-1)=1$ ;  $\Phi_{MH}(0\bullet)=0$ .

Значение  $\Phi_{M0}(i\bullet)$  получается из последней формулы при

<sup>1</sup> Звездочка в индексе  $i$  указывает, что эта величина накопленной фазы перед нагревом (охлаждением) на  $i$ -ом цикле;

текущее значение дается без звездочки.

$$T = T_H(i-1) < T_H(i).$$

Для температур начала образования новой фазы, имеем:

$$T_{ФН}(i) = \Phi_{МФ}((i-1) \cdot) (A_H - M_H) + M_H, \quad (2)$$

$$T_{ФФ}(i) = \Phi_{МН}(i \cdot) (A_H - M_H) + M_H, \quad i=0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Величину  $\Phi_{МН}(i \cdot)$  входящую в формулу (1) можно найти рассматривая правую (от диагонали BD) часть концентрационной зависимости (рис. 2), в виде:

$$\Phi_{МН}(i \cdot) = \Phi_{МН}((i-1) \cdot) \frac{T_0(i) - T_{ФН}(i)}{T_0(i-1) - T_{ФН}(i)} + \Phi_{МФ}((i-1) \cdot) \frac{T_0(i-1) - T_0(i)}{T_0(i-1) - T_{ФН}(i)}. \quad (4)$$

Здесь  $\Phi_{МН}(0) = 0$ ,  $T_{ФН}(i) \leq T \leq T_0(i-1)$ ,  $i=1, 2, \dots$

Текущее значение  $\Phi_{МН}(i)$  получается из формулы (4) при  $T_0(i) = T$ .

Таким образом определив по формуле (4) значение  $\Phi_{МН}(i \cdot)$  величину мартенситной фазы на  $i$ -ом термоцикле можем найти по формуле (1). При этом температуры образования фаз связаны с ними формулами (2) и (3).

Рассмотрим теперь случай, когда термоциклирование начинается с обратного мартенситного превращения, т.е. с линии DA (рис. 2). Рассуждая аналогично предыдущему случаю получаем следующие рекуррентные соотношения:

$$\Phi_{МН}(i \cdot) = \Phi_{МН}((i-1) \cdot) \frac{T_0(i+1) - T_{ФН}(i)}{T_0(i) - T_{ФН}(i)} - \Phi_{МФ}(i \cdot) \frac{T_0(i+1) - T_0(i)}{T_0(i) - T_{ФН}(i)}. \quad (5)$$

Здесь  $i=1, 2, 3, \dots$ , причем текущее значение  $\Phi_{МН}(i)$  получается из последнего выражения заменой  $T_0(i+1)$  на  $T$ . ( $T_{ФН}(i) \leq T \leq T_0(i)$ ).

В рассматриваемом случае связь между температурами образования фаз и их количеством дается в виде:

$$T_{ФН}(i) = \Phi_{МФ}(i \cdot) (A_H - M_H) + M_H, \quad (6)$$

$$T_{ФФ}(i) = \Phi_{МН}((i-1) \cdot) (A_H - M_H) + M_H \quad (7)$$

Для неизвестной величины  $\Phi_{МФ}(i \cdot)$  входящей в формулу (5) аналогично получаем:

$$\Phi_{МФ}(i \cdot) = \Phi_{МФ}((i-1) \cdot) \frac{T_{ФФ}(i-1) - T_H(i)}{T_{ФФ}(i-1) - T_H(i-1)} + \Phi_{МН}(i-2) \frac{T_H(i) - T_H(i-1)}{T_{ФФ}(i-1) - T_H(i-1)}.$$

(8)

Здесь  $i=2, 3, \dots$



Текущее значение  $\Phi_{M_0}(i)$  получается из последнего выражения заменой  $T_H(i)$  на  $T$ .

Для определения величины  $\Phi_{M_0}(1)$  приведем отдельную формулу, которая легко получается из анализа графика "фазовой диаграммы"

$$\Phi_{M_0}(1) = \frac{T_{\Phi_0}(1) - T}{T_{\Phi_0}(1) - M_K} + \Phi_{MH}(0) \cdot \frac{T - M_K}{T_{\Phi_0}(1) - M_K},$$

$$M_K \leq T \leq T_{\Phi_0}(1).$$

Таким образом, из анализа "фазовой диаграммы" получены достаточно простые рекуррентные соотношения для определения величин накопленной фазы для произвольного количества термоциклов. Численная реализация данной программы на представляет больших трудностей.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Механика прочности материалов с новыми функциональными свойствами. -АН СССР. Труды XXIV Всесоюзного семинара "Актуальные проблемы прочности", 17 - 21 декабря 1990 г. Рубежное. 260 с.
2. Материалы с новыми функциональными свойствами. -Материалы семинара, НПИ, 1990, Новгород-Боровичи. 184 с.
3. Абдрахманов С. А. Деформация материалов с памятью формы. -Бишкек. "Илим" 1991 г. 117 с.
4. Лихачев В. А., Малинин В. Г. Структурно-аналитическая теория прочности. -Санкт-Петербург, "Наука" 1993 г. 470 с.

УДК 514.753

## ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ СПЕЦИАЛЬНОЙ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, СОХРАНЯЮЩЕЙ ТЕНЗОР ЭЙНШТЕЙНА

**Ж. Молдобаев, Г. Нарбаева**

Многообразие, в котором задана метрика

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j,$$

(1)

где  $g_{ij}$  - симметрический тензор и матрица, составленная из его компонент невырожден, называется римановым пространством и обозначается  $V_n$ . Следующие геометрические объекты получаемые из метрического тензора относятся к основным объектам риманово пространство  $V_n$ :

$\Gamma_{ij,k}(x)$ ,  $\Gamma_{ij}^k(x)$  - символы Кристоффеля 1-го и 2-го рода  $V_n$  соответственно,  $R_{ij}^k(x)$ ,  $R_{mjk}(x)$ , -тензоры Римана  $V_n$ ,

$R_{ij}(x)$  -тензор Риччи  $V_n$ ,  $R(x)$  -скалярная кривизна  $V_n$ ,

$$E_{ij}(x) = R_{ij} - \frac{R}{2}g_{ij} \quad \text{- тензор Эйнштейна } V_n.$$

С прикладной точки зрения особенно важную роль в римановых пространствах  $V_n$  играют тензоры Эйнштейна  $E_{ij}$  и Риччи  $R_{ij}$ . Поэтому актуально изучение отображений и преобразований  $V_n$ , при которых эти тензоры сохраняются. В настоящей статье рассмотрены такие преобразования и покажем физический смысл этих преобразований.

1. Специальные группы преобразований, сохраняющей тензоры Эйнштейна.

Определение 1. Отображение  $f$  риманова пространства  $V_n$  на  $\bar{V}_n$  называется специальным отображением, сохраняющим тензор Эйнштейна, если в общей по этому отображению системе координат  $x$  соответствующие компоненты тензоров Эйнштейна  $V_n$  и  $\bar{V}_n$  связаны следующими соотношениями:

$$\bar{E}_{ij}(x) = \varphi(x)E_{ij}(x) \quad (2)$$

где  $E_{ij}(x)$  и  $\bar{E}_{ij}(x)$  -тензоры Эйнштейна  $V_n$  и  $\bar{V}_n$

$\varphi(x)$  – некоторый инвариант.

Определение 2. Группы преобразований  $G$ , пространства  $V_n$  называется специальной группой, сохраняющей тензор Эйнштейна, если она определяет отображения  $V_n$  на себя, сохраняющие тензор Эйнштейна

Теорема 1. Фундаментальный вектор однопараметрической специальной группы преобразований, сохраняющий тензор Эйнштейна, удовлетворяет условиям

$$L_\xi E_{ij} = \varphi E_{ij} \quad (3)$$

(где  $\varphi(x)$  – определенный инвариант), которые являются необходимыми и достаточными.

Доказательство. Пусть риманово пространство  $V_n$  допускает однопараметрическую специальную группу преобразований, сохраняющую тензор Эйнштейна.

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x, \tau), \quad \frac{\partial \bar{x}^h}{\partial \tau} = \xi^h(\bar{x}) \quad (4)$$

Для фиксированного параметра  $\xi$  отображение, (4) представляет специальное отображение сохраняющее тензор Эйнштейна. Пользуясь стандартными методами, учитывая (4) и то, что

$$\bar{E}_{ij}(\bar{x}) = E_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^j}$$

легко получим условие (3).

Полученные уравнения носят инвариантный характер. Этим мы доказали необходимость выполнения формул (3).

Докажем достаточность. Пусть в  $V_n$  существует решение уравнений неизвестного вектора  $\xi^h$ . Покажем, что вектор  $\xi^h$  является фундаментальным вектором однопараметрической специальной группы преобразований, сохраняющей тензор Эйнштейна. Для этого мы выберем систему координат такую, что  $\xi^h = \delta_1^h$ .

Тогда (3) запишутся следующим образом:

$$\partial_i E_{ij}(x) = \varphi(x) E_{ij}(x) \quad (5)$$

Формулы (5) представляют собой дифференциальные уравнения относительно неизвестных функций  $E_y(x)$ . Общее решение этой системы представимо в виде:

$$E_y(x) = \bar{\varphi}(x) \bar{E}_y(x^2, x^3, \dots, x^n),$$

где  $\bar{\varphi}(x) = e^{\int \varphi(x) dx}$   
 $\bar{E}_y(x^2, x^3, \dots, x^n)$ , - функции указанных аргументов.

Вычислим увлеченное значение  $\bar{E}_y(x)$ , оно равно

$$\bar{E}_y(\bar{x}^h) = \bar{E}_y(x^h + \delta_t^h \tau) = \bar{\varphi}(\bar{x}) \bar{E}_y(x^2, x^3, \dots, x^n).$$

Тогда выполняются условия (1), причем

$$\varphi(x) = \frac{\bar{\varphi}(\bar{x})}{\varphi(x)}.$$

А это означает, что одно параметрическая группа, порожденная  $\xi_i$ , удовлетворяющим (3), является специальной группой преобразований, сохраняющих тензор Эйнштейна, так как при фиксированном  $\tau$  отображении является специальным отображением, сохраняющим тензор Эйнштейна.

Теорема доказана.

## 2. Физический смысл

Как известно, основная задача теории поля-определение поля в зависимости от распределения и движения материи- привела к необходимости получения уравнений поля. Они были получены А.Эйнштейном в 1915 году [2] в виде

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \lambda T_{\alpha\beta} \quad (6)$$

где  $\lambda$  - постоянная,  $T_{\alpha\beta}$  - тензор энергии - импульса,  $g_{\alpha\beta}, R, R_{\alpha\beta}$  - соответственно метрический тензор, скалярная кривизна, тензор Риччи пространства  $V_4$ .

Компоненты метрического тензора  $g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3, x^4)$  зависят от распределения и движения материи и должно удовлетворять условию, чтобы в каждой точке области пространства-времени невырожденными вещественными преобразованиями приводились к виду:

$$(g_{\alpha\beta})_p = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

то есть, чтобы в каждой точке  $V_4$  в касательном пространстве имела место геометрия Минковского.

Левая часть уравнения целиком определяется геометрией пространства-времени: правая часть содержит постоянную  $\lambda$  и тензор энергии импульса  $T_{\alpha\beta}$ , определяемый и движением материи. Таким образом уравнения (6) означают, что материя определяет геометрию пространства-времени и, наоборот, движение этих масс определяется метрическим тензором пространства, которое в общем случае не будет плоским.

Если предположим, что тензор энергии импульса  $T_{\alpha\beta}$  инвариантен относительно некоторой группы преобразований, то есть

$$L_{\xi} T_{\alpha\beta} = \varphi T_{\alpha\beta}, \quad (8)$$

то эта группа будет обладать свойством

$$L_{\xi} E_{ij} = \varphi E_{ij}. \quad (9)$$

Действительно, пусть тензор энергии импульса  $T_{\alpha\beta}$  инвариантен относительно рассматриваемой группы преобразований. Дифференцировав по Ли обе части уравнений поля, имеем:

$$L_{\xi} E_{ij} = \lambda L_{\xi} T_{ij}. \quad (10)$$

Тогда в силу (8) и уравнения поля (6) из (10) получим

$$L_{\xi} E_{ij} = \varphi E_{ij}$$

А теперь предположим наоборот, пусть рассматриваемая группа обладает свойством (9). Тогда дифференцировав по Ли обе части уравнения поля, имеем

$$L_{\xi} E_{ij} = \lambda L_{\xi} T_{ij}.$$

Так как рассматриваемая группа обладает свойством (9), то получим:

$$\varphi E_{ij} = \lambda L_{\xi} T_{ij}. \quad (11)$$

Тогда в силу уравнения поля имеем

$$\lambda \varphi T_{ij} = \lambda L_{ij} T_{ij}.$$

Отсюда получим

$$L_{ij} T_{ij} = \varphi T_{ij}.$$

В работах А.М.Мухамедова [1], учитывая, что свойства симметрии пространственно-временного континуума влекут за собой конкретные свойства симметрии тензора энергии импульса и, наоборот, была изучена группа движений пространственно-временных многообразий с тензором энергии-импульса идеальной жидкости. Аналогично можно изучать свойство симметрии пространственно-временного континуума в виде специальной группы преобразований. В этой связи интересно рассматривать специальные группы преобразований, обладающие свойством (3), то есть сохраняющие тензор Эйнштейна.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мухамедов А.М. О свойствах симметрии заряженной жидкости в ОТО. // Изв. вузов. Физика. - 1978. - Вып. 11. - с. 113-117
2. Einstein A. Zur allgemeinen Relativitätstheorie, Berl. Ber. 1915. 778 p.