УДК: 517.924
DOI 10.33514/1694-7851-2023-1-128-131

Кутанов А.
физ.-мат. илим. канд., проф. м.а.
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Асылбекова К.Дж.
ага окутуучу
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Солтонкулова Ж.М.
физ.-мат. илим. канд., доц. м.а.
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети

КЕЧИКТИРИЛГЕН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИ ЭТАП-ЭТАБЫ МЕНЕН ИНТЕГРАЦИЯЛООНУН БОЛЖОЛДУУ ЫКМАСЫ

Аннотациясы: Бул иштин максаты – ырааттуу интеграциялоонун (кадамдар ыкмасы), функцияларды түзүүнүн жана артта калган аргумент менен дифференциалдык теңдемени чечүүнүн оперативдүү ыкмаларын колдонуу.

Негизги сөздөр: дифференциалдык теңдемелер, жакындаштырылган чыгарылыш, функция.

Кутанов А.К.
канд. физ.-мат. наук, и.о. проф.
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
Асылбекова К.Дж.
старший преподаватель
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
Солтонкулова Ж.М.
канд. физ.-мат. наук, и.о. доц.
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ПОШАГОВОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Аннотация: Цель данной статьи – применение методов последовательного интегрирования (метод шагов), производящих функций и операционного для решения дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом.

Ключевые слова: Дифференциальные уравнения, приближенное решение, функция.

Kutanov A.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Acting Acting Professor
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Asylbekova K.J.
Senior Lecturer
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Soltonkulova Zh.M.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Acting Associate Professor
Kyrgyz State University named after I. Arabaev

AN APPROXIMATE METHOD FOR STEP-BY-STEP INTEGRATION OF A DELAYED DIFFERENTIAL EQUATION

Annotation: The purpose of this work is to apply the methods of sequential integration (method of steps), generating functions and operational for solving a differential equation with a retarded argument.

Keywords: Differential equations, approximate solution, function.

Рассмотрим уравнение

$$y'(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x) y\big(h_i(x)\big) + g(x)\,,\quad x \in [a,b],$$
$$y(\xi) = \varphi(\xi),\ \text{ если } \ \xi \notin [a,b].$$

Обозначим

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } h_i(x) \in [a,b], \\ \varphi\big(h_i(x)\big), & \text{если } h_i(x) \notin [a,b], \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)\varphi_i(x) + g(x).$$

Тогда это уравнение можно линеризировать, следуя [1], записав его в виде

$$y'(x) - \sum_{i=1}^{n} P_i(x) y\big(h_i(x)\big) = f(x). \qquad (1)$$

Будем предполагать, что f, P_i, h_i $(i = \overline{1,n})$ определены на $[a,b]$, f, и P_i суммируемы, $h_i(x) \le x$, причем функции h_i удовлетворяют условию Липшица с постоянной K.

Задача Коши (1) и

$$y(a) = \alpha \qquad (2)$$

с помощью эквивалентной подстановки

$$y(x) = \int_a^x y(s)ds + \alpha$$

приводится к уравнению

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x) \int_a^b D_i(x,s)ds + \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} P_i(x) D_i(x,a) + f(x). \qquad (3)$$

Здесь $D_i(x,s)$ – характеристическая функция множества

$$\{(x,s)\epsilon[a,b] \times [a,b]: a \le s \le h_i(x) \le b\}.$$

Мы предлагаем приближенный метод решения задачи Коши, основанный на аппроксимации h_i ступенчатыми функциями. А именно, заменяем на полуинтервале $[x_i, x_{i+1})$

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i,\ \ (i = 0,1,2,\dots,n-1)$$

функцию $h_i(x)$ константой $h_i(x_i)$.

Приближенное решение уравнения (3) находится из соотношений:

$$y_i(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x) \int_a^b D_i(x,s) \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i(s) y_i(s) ds + \alpha \sum_{i=1}^{n} P_i(x)$$
$$D_i(x,a) + f(x),\ \ x\epsilon[x_i, x_{i+1}]. \qquad (4)$$

Здесь $\sigma_i(x)$ – характеристическая функция отрезка $[x_i, x_{i+1}]$,

$(i = 0,1,2,\dots,n-1)$. Обозначим $y_i(x)$ – приближенное решение задачи Коши при $x\epsilon[x_i, x_{i+1}]$. Учитывая равенства

$$y(x) = \int_a^x y(s)ds + \alpha,$$

из уравнения (4) получим:

$$y_0(x) = \alpha + \int_a^x f(s)ds, \;\; x \in [0, x_1],$$

$$y_i(x) = y_{i-1}(x_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1} D_j\big(h_i(x_i)\big)y\big(h_i(x_i)\big)\cdot \int_{x_i}^{x} P_i(s)ds +$$

$$+\alpha\sum_{i=1}^{n}\int_{x_i}^{x}(D_i(s,a)-1)P_i(s)ds + \int_{x_i}^{x} f(s)ds, \qquad (5)$$

$$(x \in \; [x_i, x_{i+1}), \;\; i = 0,1,2,\dots,n-1).$$

Функцию

$$\bar{y}(x) = \sum_{i=0}^{n-1}\psi_i(x),$$

где

$$\psi_i(x) = \begin{cases} y_i(x), & \text{если } x\epsilon[x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{если } x \notin [x_i, x_{i+1}], \end{cases}$$

принимаем за приближенное решение задачи Коши при $x \in [a, b]$.

Скорость сходимости предлагаемого метода характеризуется оценкой

$$|\bar{y}(x) - y(x)| \le c\frac{b-a}{n},$$

где c – константа, независящая от n.

Теперь используем этот метод для приближенного построения фундаментальной системы решений

$$y(x) = \{y^0(x), y^1(x), \dots, y^{n-1}(x)\}$$

соответствующего однородные уравнения

$$L^n(y) = y^n(x) - \sum_{i=1}^{n} P_i(x)y\big(h_i(x)\big), \;\; \text{если } \; x \in [a, b],$$

$$y(\xi) = 0, \;\; \text{если } \; \xi \notin [a, b].$$

Реализация метода для этого случая приводит к с следующим формам приближенного вычисления при данном шаге $l = \frac{b-a}{m}$.

$$y^n_{m,0}(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} + \sum_{i=1}^{n}\int_a^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}(h_i(s)-a)^n P_i(s)ds, \;\; x \in [a, x_1].$$

$$y^n_{m,i}(x) = \sum_{i=0}^{n-1}\Big(y^n_{m,i-1}(x_i)\Big)^{m_i}\cdot\frac{(x-x_i)^n}{n!} +$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int_{x_i}^{x} y_j(s,a)\cdot\frac{(x-s)^{m_j}}{(m_j)!}P_j(s)\frac{\left(h_j(s)-a\right)^m}{m!}ds$$
$$(i=0,1,\dots,n-1,\;\; j=0,1,\dots,m-1).$$

Скорость сходимости метода для этого случая характеризуется оценкой

$$|y_m^n(x)-y^n(x)|\le c\left(\frac{b-a}{m}\right)^n.$$

В качестве примера рассмотрим задачу

$$y'(x)=y(x^2)+xy(x-0{,}1)+f(x),\;\text{ если }\; x\in[0{,}1],$$
$$y(\xi)=0,\;\; \xi\notin[0{,}1],$$
$$y(0)=1.$$

Здесь

$$f(x)=\begin{cases}-x^2,\;\text{ при }\; x\in[0{,}0{,}1],\\ -2x^2-0{,}9x,\text{ при }\; x\notin[0{,}0{,}1].\end{cases}$$

Вычисления по формулам (5) с шагом $l=\frac{b-a}{n}$ привела к следующим результатом:

$$y_0(x)=1+x-0{,}3333x^2,\;\text{ если } x\in[0{,}0{,}1],$$
$$y_2(x)=0{,}909+1{,}1592x+0{,}197x^2-0{,}6667x^3,\;\text{ если } x\in[0{,}2{,}0{,}3],$$
$$y_4(x)=0{,}9362+1{,}159x+0{,}197x^2-0{,}6667x^3,\;\text{ если } x\in[0{,}4{,}0{,}5],$$
$$y_6(x)=0{,}801+1{,}352x+0{,}291x^2-0{,}6667x^3,\;\text{ если } x\in[0{,}6{,}0{,}7],$$
$$y_8(x)=0{,}556+1{,}61x+0{,}381x^2-0{,}6667x^3,\;\text{ если } x\in[0{,}8{,}0{,}9]$$

Результаты сравнения точного решения $y=1+x$ с приближенными следующие:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$y(x)-\bar{y}(x)$	0	0,002	0,0024	0,0011	0,0113	0,018	0,027	0,039	0,054	0,072	0,092

Список использованной литературы:

1. Азбелев Н.В. Дифференциальные уравнения. –№№8, 9. – 1972.

2. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1969.

3. Крылов В. Вычислительные методы высшей математики. – Т. 2. – Минск: Высшая школа, 1975.

Рецензент: док. физ.-мат. наук, и.о. проф. Алымбаев А.Т.