УДК: 517.445
DOI 10.33514/1694-7851-2023-1-67-71

Белеков К.Ж.
физ.-мат. илим. канд., доц. м.а.
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
kenjebek@mail.ru
Эгембердиев Ш.А.
физ.-мат. илим. канд., доц.
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
egshamu@yandex.ru

ӨЗГӨРҮЛМӨ КОЭФФИЦИЕНТТЕР МЕНЕН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИ ОПЕРАЦИЯЛЫК ЫКМА МЕНЕН ЧЕЧҮҮ

Аннотация: Дифференциалдык теңдемени операциялык ыкма менен чечүү идеясы, изделип жаткан функцияга – түпнускага карата дифференциалдык теңдемеден сүрөттөлүш деп аталган башка функцияга карата теңдемеге өтөт . Аны сүрөттөлүшкө карата чечип, андан кийин тиешелүү түпнускага өтүү менен, бул дифференциалдык теңдеменин изделүүчү чечими табылат.

Негизги сөздөр: өзгөрүлмө коэффициенттүү дифференциалдык теңдемелер, түпнуска, сүрөттөлүш, Лаплас өзгөртүп түзүүсү, аныкталбаган коэффициенттер ыкмасы.

Белеков К.Ж.
канд. физ.-мат. наук, и.о. доц.
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
kenjebek@mail.ru
Эгембердиев Ш.А.
канд. физ.-мат. наук, доц.
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
egshamu@yandex.ru

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ОПЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Аннотация: Идея решения дифференциального уравнения операционным методом состоит в том, что от дифференциального уравнения относительно искомой функции – оригинала переходят к уравнению относительно другой функции, называемой изображением. Решая его относительно изображения и переходя затем к соответствующему оригиналу, находят искомое решение данного дифференциального уравнения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, оригинал, изображение, преобразование Лапласа, метод неопределенных коэффициентов.

Belekov K.Zh.

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Acting Associate Professor
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
kenjebek@mail.ru
Egemberdiev Sh.A.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
egshamu@yandex.ru

SOLVING DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS BY THE OPERATIONAL METHOD

Annotation: The idea of solving the differential equation by the operational method is that from the differential equation with respect to the original function being sought, one passes to the equation with respect to another function , called the image. Solving it with respect to the image and then moving on to the corresponding original, they find the desired solution of this differential equation.

Keywords: differential equations with variable coefficients, original, image, Laplace transform, method of indefinite coefficients.

В настоящей статье рассматривается применение операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Нахождение общего решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами является сложной задачей, потому что классического метода решения таких уравнений не существует.

Рассмотрим применение операционного метода к решению следующих трех дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

Пример 1. Найти общее решение ДУ второго порядка $ty''(t)-(t+1)y'(t)-2(t-1)y(t)=0$.

Решение. Пусть искомая функция $y(t)$ является оригиналом, которая имеет изображение $Y(p)$, т.е. $y(t)\to Y(p)$. Берем от обеих частей данного уравнения прямое преобразование Лапласа и используем свойства дифференцирование оригинала и изображения.

$$y'(t)\to pY(p)-y(0)$$

$$ty'(t)\to -Y(p)-pY'(p)$$

$$y''(t)\to p^2Y(p)-py(0)-y'(0)$$

$$ty''(t)\to -\left(p^2Y(p)-py(0)-y'(0)\right)'=-2pY(p)-p^2Y'(p)+y(0)$$

Теперь, подставляя найденные изображения в исходное уравнение, получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка следующего вида:

$$\left(-p^2+p+2\right)Y'(p)+\left(-3p+3\right)Y(p)=C_0,$$

где $C_0=-2y(0)$.

Это дифференциальное уравнение имеет решение:

$$Y(p)=C_0\frac{\frac{1}{2}p^2+p}{(p-2)(p+1)^2}+C_1\frac{1}{(p-2)(p+1)^2}$$

Теперь переходим к оригиналу. Для этого изображение $Y(p)$ разложим на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов.

$$Y(p)=C_0\left(\frac{\frac{4}{9}}{p-2}+\frac{\frac{1}{18}}{p+1}+\frac{\frac{1}{6}}{(p+1)^2}\right)+C_1\left(\frac{\frac{1}{9}}{p-2}+\frac{-\frac{1}{9}}{p+1}+\frac{-\frac{1}{3}}{(p+1)^2}\right)$$

Воспользовавшись свойством линейности и таблицей, получим искомую функцию (оригинал):

$$y(t)=\tilde{C}_1e^{2t}+\tilde{C}_2\left(1+3t\right)e^{-t},$$

где $\tilde{C}_1=\frac{4}{9}\left(C_0+\frac{1}{4}C_1\right)$, $\tilde{C}_2=\frac{1}{18}\left(C_0-2C_1\right)$.

Пример 2. Найти решение дифференциального уравнения второго порядка $t^2y''(t)-2ty'(t)+2t^2y(t)=0$.

Решение. Пусть $y(t)\rightarrow Y(p)$. Берем от обеих частей данного уравнения прямое преобразование Лапласа и используем свойства дифференцирование оригинала и изображения:

$$y'(t)\rightarrow pY(p)-y(0)$$

$$ty'(t)\rightarrow -Y(p)-pY'(p)$$

$$y''(t)\rightarrow p^2Y(p)-py(0)-y'(0)$$

$$ty''(t)\rightarrow -\left(p^2Y(p)-py(0)-y'(0)\right)'=-2pY(p)-p^2Y'(p)+y(0)$$

$$t^2y''(t)\rightarrow -\left(-2pY(p)-p^2Y'(p)+y(0)\right)'=p^2Y''(p)+4pY'(p)+2Y(p)$$

$$-ty(t)\rightarrow Y'(p)$$

$$t^2 y(t) \to Y''(p)$$

Теперь подставляя в исходное уравнение, найденные изображения, получаем также линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами следующего вида:

$$\left(p^2+2\right)Y''(p)+6pY'(p)+4Y(p)=0$$

Можно заметить, что левая часть есть производная от какой-то функции. Распишем слагаемые следующим образом:

$$\left[\left(p^2+2\right)Y''(p)+2pY'(p)\right]+\left[4pY'(p)+4Y(p)\right]=0$$

Каждая квадратная скобка производная произведения

$$\left(\left(p^2+2\right)Y'(p)\right)'+\left(4pY(p)\right)'=0$$

или

$$\left(\left(p^2+2\right)Y'(p)+4pY(p)\right)'=0$$

Интегрируя обе части последнего равенства получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\left(p^2+2\right)Y'(p)+4pY(p)=C_1.$$

Отсюда

$$Y'(p)+\frac{4p}{p^2+2}Y(p)=\frac{C_1}{p^2+2}$$

Это дифференциальное уравнение имеет решение:

$$Y(p)=\frac{C_1}{3}\frac{p^3+6p}{\left(p^2+2\right)^2}+C_2\frac{1}{\left(p^2+2\right)^2}$$

Теперь переходим к оригиналу. Для этого изображение $Y(p)$ разложим на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов.

$$Y(p)=\frac{C_1}{3}\frac{p}{p^2+2}+\frac{4C_1}{3}\frac{p}{\left(p^2+2\right)^2}+C_2\frac{1}{\left(p^2+2\right)^2}$$

Воспользовавшись свойством линейности, свойством интегрирование оригинала и таблицей, получим искомую функцию (оригинал):

$$y(t)=\frac{C_1}{3}\cos\sqrt{2}t+\frac{\sqrt{2}C_1}{3}t\sin\sqrt{2}t-\frac{C_2}{4}t\cos\sqrt{2}t+\frac{C_2}{4\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t,$$

Пример 3. Найти решение дифференциального уравнения третьего порядка $ty'''(t)-y''(t)-ty'(t)+y(t)=0$.

Решение. Пусть $y(t) \to Y(p)$. Берем от обеих частей данного уравнения прямое преобразование Лапласа и используем свойства дифференцирование оригинала и изображения.

$$y'(t) \to pY(p) - y(0)$$

$$ty'(t) \to -Y(p) - pY'(p)$$

$$y''(t) \to p^2Y(p) - py(0) - y'(0)$$

$$y'''(t) \to p^3Y(p) - p^2y(0) - py'(0) - y''(0)$$

$$ty'''(t) \to -3p^2Y(p) - p^3Y'(p) + 2py(0) + y'(0)$$

Теперь подставляя в исходное уравнение, найденные изображения, получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка следующего вида:

$$\left(-p^3+p\right)Y'(p) + \left(-4p^2+2\right)Y(p) + 3y(0)p + 2y'(0) = 0$$

Это дифференциальное уравнение имеет решение:

$$Y(p) = y(0)\frac{p}{p^2-1} + y'(0)\frac{1}{p^2-1} + C\frac{1}{p^2(p^2-1)}$$

Теперь переходим к оригиналу. Для этого изображение $Y(p)$ разложим на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов.

$$Y(p) = y(0)\frac{p}{p^2-1} + y'(0)\frac{1}{p^2-1} + C\left(\frac{-1}{p^2} + \frac{\frac{1}{2}}{p-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{p+1}\right)$$

Воспользовавшись свойством линейности и таблицей, получим искомую функцию (оригинал):

$$y(t) = C_1cht + C_2sht - C_3t \quad y(t) = \tilde{C}_1e^{2t} + \tilde{C}_2\left(1+3t\right)e^{-t},$$

где $C_1 = y(0),\ C_2 = y'(0) + C,\ C_3 = C$.

Список использованной литературы:

1. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. – М., 1975. — 408 с.
2. Эйдерман В. Я. Операционное исчисление. – М.: Физматлит, 2002. – 256 с.

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доц. Ишмахаметов К.