УДК: 817.9 (075.8)
DOI 10.33514/1694-7851-2023-1-62-66

Баетов А.К.
физ.-мат. илим. канд., доц.
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бексултанов Ж.Т.
физ.-мат. илим. канд., доц.
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Жумадил уулу А.
ага окутуучу
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Казыбаева М.С.
окутуучу
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети

ПРАКТИКАДА КЕЗДЕШҮҮЧҮ МАСЕЛЕЛЕРДЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИ ТҮЗҮҮНҮН МЕТОДИКАСЫ

Аннотациясы: Негизинен бул иште турмушта колдонулуучу маселелерди дифференциалдык теңдемелер аркылуу чыгаруу каралды. Берилген маселени чыгаруучу дифференциалдык теңдемени түзүүнүн методикасы жана аны түзүүнүн схемасынын негизги этаптары көрсөтүлгөн. Мисал катары берилген бактериянын өсүшүнүн математикалык моделин санитардык медицинада колдонууга болот. Турмуштагы маселелерди дифференциалдык теңдемелерди колдонуу аркылуу чыгаруу ушуну менен гана чектелбейт.

Негизги сөздөр: дифференциалдык теңдеме, модел, функция, метод, пропорционалдуулук коэффициенти, интеграл, кубулуштар, баштапкы шарт.

Баетов А.К.
канд. физ.-мат. наук, доц.
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
Бексултанов Ж.Т.
канд. физ.-мат. наук, доц.
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
Жумадил уулу А.
старший преподаватель
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
Казыбаева М.С.
преподаватель
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева

МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Аннотация: Статья посвящена решению практических задач с использованием дифференциальных уравнений. Показан способ построения дифференциального уравнения для данной задачи и основные этапы схемы его построения. Приведенная в качестве примера математическая модель роста бактерий может быть использована в санитарной медицине. Решение реальных задач с использованием дифференциальных уравнений не ограничивается этим.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, модель, функция, метод, коэффициент пропорциональности, интеграл, процесс, начальные условия.

Baetov A.K.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Beksultanov Zh.T.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Zhumadil uulu A.
Senior Lecturer
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Kazybaeva M.S.
Lecturer
Kyrgyz State University named after I. Arabaev

METHOD OF CONSTRUCTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS ENCOUNTERED IN PRACTICAL PROBLEMS

Annotation: The article is devoted to solving practical problems using differential equations. The method of constructing a differential equation for this problem and the main stages of its construction scheme are shown. The mathematical model of bacterial growth given as an example can be used in sanitary medicine. Solving real problems using differential equations is not limited by this.

Keywords: differential equations, model, function, method, proportionality coefficient, integral, process, initial conditions.

Практикада кездешүүчү дээрлик баардык процесстер кандайдыр бир функциялар аркылуу мүнөздөлүшөт. Ал функциялардын касиеттерин жакшылап билүү каралып жаткан процесстин өркүндөшүн (тарыхын) билүүгө жана келечегин прогноздоого мүмкүнчүлүк түзөт. Ошол себептен математика илиминин көп тармактары функцияларды жана алардын касиеттерин изилдөөгө, ошондой эле изилдөөнүн методдоруна арналат. Функцияларды изилдөөнүн бир кубаттуу куралы катары дифференциалдык теңдемелердин теориясы эсептелинет.

Дифференциялдык теңдемелер теориясы математика илиминин негизги бөлүгүнүн бири. Аларды колдонуу аркылуу көптөгөн прикладдык маселелерди чыгарууга болот.

Жаратылыштын кубулуштарын окуп үйрөнүүдө физиканын жана техниканын, химиянын жана биологиянын, экономиканын жана башка көп тармактардын маселелерин чыгаруу талап кылынат. Көп учурда мындай тармактардын маселелерин чыгарууда тигил же бул кубулуштарды сүрөттөп көрсөткөн чоңдуктардын ортосундагы түздөн-түз көз карандуулукту орнотууга мүмкүн эмес. Бирок көп учурда кубулуштарды сүрөттөп көрсөткөн чоңдуктар менен алардын башка башка бир өзгөрмөлөрүү чоңдуктарга карата өзгөрүшүнүн ылдамдыктарынын ортосундагы байланыштарды түзүүгө болот.

Математика тилде айтканда, жаратылыш кубулуштары изделүүчү функциянын туундуларын кармап турган теңдемелер менен моделдештирилет. Мындай теңдемелер дифференциялдык деп аталышат. Дифференциалдык теңдемелерди түзүү өтө татаал жана орчунду маселе бардык учурлар үчүн универсалдуу методу көрсөтүүгө болбойт. Көпчүлүк учурда дифференциалдык теңдемелдерде өсүндүлөр каралбай калган учурлар болот. Мисалы, $\vartheta = \dfrac{ds}{dt}$

аркылуу ылдамдыкты билдирерин билебиз, мында ΔS жана Δt өсүндүлөрүн кошкон жокпуз, бирок алар бар деп эсептелинет.

$$\vartheta = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

t каалаган моментиндеги ылдамдануу

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d\vartheta}{dt} = \vartheta \frac{d\vartheta}{ds}$$ көз карандылыгы менен чагылдырылат.

Берилген процессти окуп үйрөнүү, анын өзгөчө моменттерин аныктоого жана ошол процесстин жүрүшүнүн жалпы законун түзүүгө алып келет. Процесстин өзгөчө учурлары дифференциалдык теңдемелер менен туюнтулат. Бул дифференциалдык теңдемелерде процесске кирген өзгөрмө чоңдуктар менен алардын дифференциалдарын же туундуларын байланыштырат. Ал дифференциалдык теңдемени интегралдап, процесстин өзгөрмө чоңдуктарын байланыштырган теңдеме алабыз, бул процесстин жалпы жүрүү законун берет.

Дифференциалдык теңдемелерди түзүү атайын эреже жок. Көпчүлүк учурда коюлган маселелерди кадимки дифференциалдык теңдемелерди колдонуп чыгаруу методу төмөндөгүгө алып келет.

1. Маселенин шартын толук талдоо жана анын негизин ачып көрсөтүүчү чиймени чийүү.

2. Каралып жаткан процесстин дифференциалдык теңдемесин түзүү.

3. Бул теңдемени интегралдоо жана анын жалпы чыгарылышын аныктоо.

4. Берилген баштапкы шарттардын негизинде маселенин өздүк чыгарылышын аныктоо.

5. Керектүү учурларда жардамчы параметрлерди (мисалы, пропорционалдуулук коэффициентин ж.б) маселенин кошумча шарттарын колдонуп аныктоо.

6. Каралып жаткан процесстин жалпы законун түзүү Жана изделүүчү чоңдуктун сандык маанисин табу.

7. Жообун анализдөө жана маселенин мурунку ордун текшерүү.

Бул рекомендациялардын кээ бирлери маселенин мүнөзүнө байланыштуу колдонулбай калышы мүмкүн.

Прикладдык маселелерди дифференциалдык теңдемелердин жардамы менен чыгаруу көпчүлүк учурда чыгармачылдуулукту жана изделүүчү процесстин негизин терең түшүнүүнү талап кылат. Кээде жөнөкөйлөтүүчү киргизүүлөрдү кылсак болот. Мисалы: Прикладдык маселелерди татаал (ийри сызыктуу) элементти, жөнөкөйрөөк (түз сызыктуу) менен алмаштыруу, кыска убакыт ичиндеги материалдык чекиттин тең салмактуу эмес кыймылын тең салмактуу, каалагандай процесстин кичине убакыт ичиндеги өтүү ылдамдыгын турактуу деп болжолдосок болот.

Бир өтө кичине элементти экинчиси менен алмаштыруу идеясы алмашуучу жана алмаштыруучу өтө кичине элементтердин эквиваленттүүлүгүн сактоону талап кылат. Маселенин математикалык моделинде процесстин негизги параметрлерин гана эске алуу керек.

Дифференциалдык теңдемелерди түзүүнүн схемасы.

Даярдоочу этап.

1. Анализдөөнүн негизинде аргументтин (көз каранды эмес өзгөрмө) жана изделүүчү функциянын байланыш маселесин түзүү.

2. Изделүүчү функциянын туундусунун конкреттүү маанисин изилдөө.

3. Эгер туунду конкреттүү мааниге ээ болсо, өзгөрмөлөрдүн дифференциалдарынын арасындагы катнаштарды изилдөө.

4. Аргументтин маанисин жана ага тура келүүчү функциянын маанисин анализдөөдө; аргументке өсүндү берүү менен функциянын тура келүүчү өсүндүсүн аныктоо.

Негизги этап.

1. ΔY функциясынын өсүндүсү менен ΔX аргументтин өсүндүсүнүн ортосундагы көз карандуулукту табууга аракет кылуучу, башкача айтканда ΔY ти ΔX жана Хтин функциясы түрүндө чагылдыруу. Изделүүчү Y функциясын ошондой эле [a,x] кесиндисиндеги өсүндүсүн элементардык суммалоо аркылуу билдирүүгө болот.

2. Изделүүчү функциядагы ΔY өсүндүсүн алмаштыруучу жана шарттуу өсүндүнү мүнөздөөчү шарттуу элементти (ΔX менен ΔY тин ортосундагы катнашты аныктоого мүмкүн эмес учурда) киргизүү. Изделүүчү функция бул киргизүүдө өзүнүн мүнөзүн жөнөкөйлөтөт, бирок жыйынтыгы так болбойт. Бул элемент изделүүчү функциянын дифференциалы катары кабыл алынат

3. Корректүүлүгүн текшерүү ΔX жана ΔY тин 0 го жакындоосу менен толук чындыкка жакындоо баскычы чоңойот dy жана dx дифференциалдары менен байланышкан теңдемелер математиканын, физиканын, химиянын, механиканын жана башка белгилүү табигый закондордун негизинде түзүлүшү керек.

4. Изделүүчү функциянын дифференциалы dy менен анын аргументи dx тин ортосундагы көз карандуулукту жалпы учурда тең салмактуу эмес прроцесстерди тең салмактуу кылып алмаштыруучу киргизүүлөрдүн же жалпы теориялык закондордун негизинде $f(x,y)dx+\varphi(x.y)dy=0$ жөнөкөйлөтүлгөн теңдеме түрүндө (же жогорку тартиптеги дифференциалдык теңдеме) көрсөтүүгө болот.

5. Маселеден алынган дифференциалдык теңдемени интегралдоо жана изделүүчү функцияны баштапкы (кошумча) шарттардын жардамы менен аныктоо.

6. Маселеден алынган закондорун изилдөө жана чыгарылыштын параметрден болгон көз карандуулугун мүнөзүн изилдөө.

Мисал. Бактериянын өсүү ылдамдыгы. [1]

Бактериянын өсүү ылдамдыгы анын санына пропорцианылдуу. Баштапкы момент 100 бактерия болгон, 3 саттан кийин алардын саны эки эсеге көбөйгөн. Бактериянын санынын убакыттан көз карандуулук формуласын тапкыла?

Чыгаруу: мейли x –берилген моменттеги бактериялардын саны болсун. Анда көбөйүү ылдамдыгы $\frac{dx}{dt}$ болот. Шарт боюнча маселенин дифференциалдык теңдемеси $\frac{dx}{dt}=kx$, мында k-бактериянын өсүү ылдамдыгы менен анын санын ортосундагы пропорционалдуулук коэффициенти.

X жана t боюнча өзгөрмөлөргө ажыратып, $\frac{dx}{x}=kdt$ алабыз.

Барабардыкты интегралдайбыз:

$$\int\frac{dx}{x}=k\int dt+\ln C \quad \text{же} \quad \ln x=kt+\ln C \tag{1}$$

(1) барабардыгын потенцирлейбиз:

$$x=e^{kt+\ln C}=e^{\ln C}e^{kt}=Ce^{kt}$$

Ошентип жалпы чыгарылыш $x=Ce^{kt}$ (2)

$t=0$ болгондо $x=100$ баштапкы шартынын маанилерин (2) жалпы чыгарылышына коюп, теңдемдеги турактуу интегралдоонучуну аныктайбыз:

$100=Ce^{0}$, мындан $k=\frac{\ln 2}{3}$ алабыз.

Анда $e^{kt} = e^{\frac{\ln 2}{3}} = \left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{t}{3}} = 2^{\frac{t}{3}}$

Ошентип изделүүчү функция $x = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$. Экинчи суроого жооп болуп төмөндөгү катнаш эсептелет.

$$\frac{x(9)}{x(0)} = \frac{100 \cdot 2^{\frac{9}{3}}}{100} = 2^3 = 8$$

башкача айтканда 9 саат ичинде бактериянын саны 8 эсе көбөйөт.

Көптөгөн кубулуштар дифференциалдык теңдемелердин жардамы менен жөнөкөй жана толук мүнөздөлөт. Ошондуктан дифференциалдык теңдемелердин турмуштагы колдонулушу суроосуна көп көңүл буру зарыл. Биринчиден ошол дифференциалдык теңдемелерди колдонуу аркылуу чыгарылуучу илимдин жана техниканын табигый закондорун билүү талап кылынат. Ушул себептен дифференциалдык теңдемелер курсунда прикладдык маселелерди чыгарууга дагы дагы эле жетишсиз көңүл бурулууда. Анын үстүнө окуу куралдарында дифференциалдык теңдемелерди түзүүгө геометриялык же кинематикалык типтеги элементардык маселелер гана каралат.

Бул иште практикада кездешүүчү ар кандай маселелердин дифференциалдык моделдерин түзүүнүн методикасы көрсөтүлдү.

Колдонулган адабияттар:

1. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука, 1987.
2. Амелькин В.В., Садовский А.П. Математические модели и дифференциальные уравнения. – Минск: Высшая школа, 1982.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Г.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Ч. II. – М.: Высшая школа, 1997.
4. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1979.
5. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Высшая школа, 1983.
6. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1967.
7. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений. – Минск: Вышэйшая школа, 1973.
8. Понтрягин Л.С. Дифференциальные уравнения и их приложения. – М.: Едиториал УРСС, 2011.
9. Самойленко А.М., Кривошеев С.А. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи. – М.: Высшая школа, 1989.
10. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985.
11. Филиппов А.Ф. Задачи и примеры по дифференциальным уравнениям. – М.: Издательство МГУ, 1998.
12. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1992.

Рецензент: физ.-мат. илим. док., проф. м.а. Алымбаев А.Т.