УДК: 517.92
DOI 10.33514/1694-7851-2023-2-443-447

Алымбаев А.Т.
физ.-мат. илим. док., проф. м.а.
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.
Бектемир кызы А.
окутуучу
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.
Акматова М.Т.
магистрант
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.

ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ЧЕКТҮҮ АЙЫРМАДАГЫ ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ЧЕКТИК МАСЕЛЕ

Аннотация. Чектүү айырмадагы теңдемеледин теориясы, дифференциялдык теңдемелерди жакындаштырып чыгарууда жана интегралдоодо мааниси өтө чоң. Азыркы учурда чектүү айырмадагы теңдемелердин проблемалары жана маселелери боюнча дифференциялдык теңдемелердин теориясына өтө жакын жана көпчүлүк учурда аны менен дал келет. Чектүү айырмадагы теңдемелерге арналган эмгектердин көпчүлүгү Коши маселесине арналган. Бул макалада сызыктуу чектүү айырмадагы теңдеме үчүн, чектик маселе жана анын чыгарылыштарын табуу маселелери каралат.

Негизи сөздөр. Экинчи тартиптеги чектүү айырмадагы теңдемелер, чектик маселе, мүнөздөөчү теңдеме, жекече жана жалпы чыгарылыш.

Алымбаев А.Т.
док. физ.-мат. наук, и.о. проф.
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
г. Бишкек
Бектемир кызы А.
преподаватель
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
г. Бишкек
Акматова М.Т.
магистрант
Кыргызский государственный ниверситет имени И. Арабаева
г. Бишкек

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Аннотация. Теория уравнений конечных разностей имеет большое значение для численного интегрирования и приближенного решения дифференциальных уравнений. По

своей современной проблематике теория уравнений конечных разностей ближе всего к конструктивной теории дифференциальных уравненний, с которой она в значительной степени сливается. В настоящее время имеется много работ по различным вопросам теории и приложению таких уравнений, в частности к задачам Коши. В данной статье рассматривается двуточечные краевые задачи для линейных разностных уравнений второго порядка и излагается методы их решения.

Ключевые слова. Разностные уравнение второго порядка, краевая задача, характеристическое уравнение, краевая условния, частное и общее решения.

Alymbaev A.T.
Doctor of Physics and Mathematics, Acting Professor
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Bishkek c.
Bektemir kyzy A.,
Lecturer
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Bishkek c.
Akmatova M.T.
Master's Student
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Bishkek c.

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SECOND-ORDER DIFFERENCE EQUATION

Abstract. The theory of difference equations is important for the approximate solution of differential equations. In its modern problems, the theory of equations of finite differences is closest to the constructive theory of differential equations, with which it largely coincides. At present, there are many works on various questions of theory and approximate methods for studying such equations, in particular, on Cauchy problems. This article considers two-point boundary value problems for second-order linear difference equations. The questions of constructing their solutions are studied.

Keywords: Difference equation of the second order, boundary value problem, characteristic equation, boundary conditions, particular and general solutions.

Киришүү

Макалада чектүү айырмадагы теңдемелер жекече учуру болгон экинчи тартиптеги сызыктуу турактуу жана турактуу эмес коэффициенттүү теңдемелердин классы каралат. Сызыктуу теңдемелердин теориясы жана анын өз алдынча теорияга айланышын бир себеби, дифференциялдык теңдемелердин чыгарылыштарын жакындаштырып чыгаруу ыкмаларын колдонуу болуп эсептелет. Чектүү айырмадагы теңдемелер биология, экономика жана башка илимдердин моделдери чектүү айырмадагы теңдемелердин терминдери, түшүнүктөрүү аркылуу жазылат.

Маселенин коюлушу

Бир тектүү жана бир тектүү эмес сызыктуу теңдеме үчүн Кошинин жана чектик маселенин чыгарылыштарын изилдөө. Чектүү айырмадагы экинчи тартиптеги сызыктуу теңдемени карайлы.

$a_0(x)y(x+2)+a_0(x)y(x+1)+a_2(x)y(x)=f(x),$ (1)

мында $a_0(x), a_1(x), a_2(x), f(x)$ – белгилүү функциялар $x\epsilon N_0=\{0,1,2,3,\dots\}$.

Эгерде $f(x)=0$, анда (1) теңдеме сызыктуу бир тектүү, ал эми $f(x)\neq 0$ сызыктуу бир тектүү эмес чектүү айырмадагы теңдеме деп аталат.

1. Тендеменин чыгарылышы

Аныктама: $[\text{а}, \text{в}]$ кесиндисинде аныкталган $y=f(x)$ функция (1) тендемеге койгондо, аны тендештикке айландырса, анда бул функция тендеменин чыгарылышы – деп аталат.

Теорема 1. Эгерде $y_1(x)$, $y_2(x)$ бир тектүү айырмадагы сызыктуу көз каранды эмес чыгарылыштары болсо $(y_1(x), y_2(x) \ddagger const)$, анда

y(x)= $c_1y_1(x)+c_2y_2(x),$ (2)

c_1c_2- каалагандай туруктуу чондуктар, функциясы

$a_0(x)y(x+2)+a_1(x)y(x+1)+a_2(x)y(x)=0,$ (3)

теңдеменин жалпы чыгарылышы болот.

Далилдөө: (2) ни (3) кө коебуз, натыйжада

$c(a_0(x)y(x+2)+a_1(x)y_1(x+1)+a_2(x)y_1(x)+c_2(a_0(x)y_2(x+2)+y_2(x)y_1(x)=$
$c_1 0+c_2 0=0.$ Демек 0=0.

Теороема 2. Эгерде $\bar{y}(x)$ функциясы (1) чектүү айырмалуу тендеменин жекече чыгарылышы болсо, анда

y(x)= $\text{c}_1y_1(x)+\text{c}_2y_2(x)+\bar{y}(x),$ (4)

(1) теңдеменин жалпы чыгарылышы болот.

Далилдөө. (4) функцияны (1) теңдемени коебуз

$$\text{c}_1(a_0(x)y_1(x+2)+a_1(x)y_1(x+1)+a_2(x)y_1(x)+c_1(a_0(x)y_2(x+2)+a_1(x)y_2(x) \\ +a_2(x)y_2(x)+a_2(x)\bar{y}(x+1)+a_2(x)\bar{y}(x)=c_1 0+c_2 0+f(x). \text{Демек } f_1(x) \\ =f_2(x)$$

2. Коши маселеси.

$a_2(x)y(x+2)+a_1(x)y(x+1)+a_2(x)y(x)=f(x),$ (5)

y(x_0)=y_0, $y(x_0+1)=y_1$ (6)

(5) чектүү айырмадагы теңдеменин (6) баштапкы шартын канагаттандырган чыгарылышын табуу Коши меселеси, – деп аталат. Коши маселесинин чыгарылышын табыш үчүн, (4) функцияны (6) баштапкы шарттарга коюп, c_1, c_2 туруктууларга карата теңдемелердин системасын алабыз

$$c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=y_0-\bar{y}(x_0),$$
$$c_1y_1(x_0+1)+c_2y_2(x_0+1)=y_1-\bar{y}(x_0+1).$$

(7) системаны туруктууларга карата Крамердин методу менен эсептейбиз

$$\text{c}_1=\frac{\begin{vmatrix} y_0-\bar{y}(x_0) & y_2(x_0) \\ y_0-\bar{y}(x_0+1) & y_2(x_0+1)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1(x_0+1) & y_2(x_0+1)\end{vmatrix}}=\frac{y_1(x_0+1)(y_0-\bar{y}(x_0)-y_1(x_0+1)((y_1-\bar{y}(x_0+1)}{y_1(x_0)y_2(x_0+1)-y_2(x_0)y_2(x_0+1)},$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 - \bar{y}(x_0) \\ y_1(x_0+1) & y_1 - \bar{y}(x_0+1) \end{vmatrix}}{y_1(x_0)y_2(x_0+1) - y_2(x_0)y_2(x_0+1)} = \frac{y_1(x_0)(y_1 - \bar{y}(x_0+1) - y_1(x_0+1)(y_0 - \bar{y}(x_0))}{y_1(x_0)y_2(x_0+1) - y_2(x_0)y_2(x_0+1)}.$$

Алынган турактуулардын маанисин (4) туюнтмага коюп, (5),(6) Коши маселенин чыгарылышын табабыз.

3. Чектик маселе.

$a_2(x)y(x+1) + a_1(x)y(x+1) + a_2(x)y(x) = f(x), (7)$

$y(x_0) = y_0, y(x_0) = y_1, (8)$

(7) теңдеменин (8) чектик шартты канаттандырган чыгарылышын табуу маселеси, - эки чектүү маселе, - деп аталат.

Теорема 3. Эгерде $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \bar{y}(x)$ - функциясы (7) теңдеменин жалпы чыгарылышы болсо, анда (7),(8) чектик маселенин чыгарылышы

$$y(x) = y_1(x)\frac{y_1(x_1)(y_1 - \bar{y}(x_0) - y_1(x_1)(y_1 - \bar{y}(x_1))}{y_1(x_0)y_1(x_1) - y_1(x_1)y_1(x_1)} + y_2(x)\frac{y_1(x_1)(y_1 - \bar{y}(x_1) - y_1(x_1)(y_1 - \bar{y}(x_1))}{y_1(x_0)y_1(x_1) - y_2(x_1)y_1(x_1)} + \bar{y}(x)$$

формуласы аркылуу аныкталат.

Теореманын далилдөөсү Кошинин маселесиндеги (6) баштапкы $y(y_0+1) = y$, шартын (8) чектик шарттын $y(x_1) = y_1$ шартына, алмаштыруудан келип чыгат б.а. $x_0 + 1$ санын x_1 санына шарттуу түрдө алаштыруудан келип чыгат.

Чектик маселенин чыгарылышын тапкыла

$$y(x+2) - 2y(x+1) - 3y(x) = 2^x, (9)$$

$$y(0) = 2, y(1) = 4. (10)$$

Бир тектүү теңдеменин мүнөздөөчү теңдемесин түзүп, анын тамырын табабыз

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0, \lambda_1 = \frac{2 + \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2+4}{2} = 3, \lambda_2 = \frac{2-4}{2} = -1.$$

Бир тектүү эмес теңдеменин жалпы чыгарылышын

$$y(x) = C_1 3^x + C_2(-1)^x.$$

Бир тектүү эмес теңдеменин жекече чыгарылышын

$$y_ж(x) = A2^x, (11)$$

түрдө издейбиз.

(11) функциянын (9) коёбуз.

$$A2^{x+2} - 2A2^{x+1} - 3A2^x = 2^x$$

$$2^x(4A - 4A - 3A) = 2^x.$$

Мындан

$4A - 4A - 3A = 1$

$-3A = 1, A = -\frac{1}{3}.$

Демек

$$y_ж(x) = -\frac{1}{3}2^x.$$

Ошентип, (9) теңдеменин жалпы чыгарылышы

$$y(x) = C_1 3^x + C_2(-1)^x - \frac{1}{3}2^x.$$

Мындан, (10) чектик шартты эске алып

$$y(0) = C_1 3^0 + C_2(-1)^0 - \frac{1}{3}2^0 = 2^0,$$
$$y(1) = C_1 3^1 + C_2(-1)^1 - \frac{1}{3}2^1 = 4.$$

Же

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \\ 3C_1 - C_2 = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}. \end{cases}$$

Крамердин эрежесинин негизинде

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ \frac{14}{3} & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{14}{3}}{-1-3} = \frac{\frac{4-14}{3}}{-4} = \frac{-\frac{10}{3}}{-4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6},$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ 3 & \frac{14}{3} \end{vmatrix}}{-4} = \frac{\frac{14}{3} - \frac{12}{3}}{-4} = \frac{\frac{2}{3}}{-4} = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}.$$

Демек, чектик (9), (10) маселенин жекече чыгарылышы төмөндөгүдөй формула менен аныкталат

$$y(x) = \frac{5}{6} \cdot 3^x - \frac{1}{6} \cdot (-1)^{x+1} - \frac{1}{3} \cdot 2^{x+1}.$$

Колдонулган адабияттар:

1. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. – М.: Наука, 1976. – 376 с.

2. Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. – Киев: Наукова думка,1972. – 248 с.

3. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М: Высщая школа, 1963. – 546 с.

4. Коврижных А.Ю., Коврижных О.О.Дифференциальные и разностные уравнение. Учебное пособи. – Екатеринбург: Типография Урал. университета, 2014. – 148 с.

5. Комаров М.А. Линейние разностные уравнения и их приложения. Учебное пособие. – Владимир: Владимир. университет, 2012. – 42 с.

Рецензент: физ.-мат. илим. док., проф. Бийбосунов Б.И.