УДК: 517.92
DOI 10.33514/1694-7851-2023-2-448-452

Алымбаев А.Т.
физ.-мат. илим. док., проф. м.а.
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.
Бектемир кызы А.
окутуучу
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.
Баратова Б.А.
магистрант
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.

ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ТУРАКТУУ КОЭФФИЦИЕНТҮҮ ЧЕКТИК АЙЫРМАДАГЫ ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ЧЕКТИК МАСЕЛЕ

Аннотация. Туруктуу коэффициенттүү үчүнчү тартиптеги чектүү айырмадагы теңдемелерин изилдөөдө, маанилүү жагдайды үчүнчү даражадагы алгебралык теңдеменин салымы чоң. теңдеменин жалпы чыгарлышы үчүнчү даражадагы алгебралык теңдеменин тамырлары аркылуу тургузулат жана анын тамырларын Карданонун формуласы менен аныктоого боло тургандыгы бизге белгилүү. Макалада үчүнчү тартиптеги туруктуу коэффициенттүү чектүү айырмадагы теңдеме үчүн чектик маселенин чыгарлышын тургузуу маселеси каралат.

Негизги сөздөр: туруктуу коэффициенттүү үчүнчү тартиптеги чектүү айырмадагы теңдеме, чектик маселе, жалпы чыгарылышы, мүнөздөөчү теңдеме.

Алимбаев А.Т.
док. физ.-мат. наук, и.о. проф.
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
г. Бишкек
Бектемир Кызы А.
преподаватель
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
г. Бишкек
Баратова Б.А.
магистрант
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
г. Бишкек

РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Аннотация. В задачах, исследующих конечно-разностные уравнения, определяющую роль играет алгебраическое уравнение третьей степени. Общее решение разностных уравнений находится через корни алгебраического уравнения третьей степени, когда известно, что корни определяются согласно формуле Кардано. В статье рассматривается задача построения решения краевой задачи для разностного уравнение третьего порядка с постоянным коэффициентом.

Ключевые слова: разностное уравнение постоянным коэффициентом третьего порядка, краевая задача, общее решение, характеристическое уравнение.

Alimbaev A.T.
Doctor of Physics and Mathematics, Acting Professor
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Bishkek c.
Bektemir Kyzy A.
Lecturer
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Bishkek c.
Baratova B.A.
Master's Student
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Bishkek c.

THIRD ORDER DIFFERENCE EQUATION WITH CONSTANT COEFFICIENT. BOUNDARY PROBLEM

Abstract. In the problems of studying finite-difference equations, the algebraic equation of the third degree plays a decisive role. The general solution of the difference is found through the roots of the algebraic equation of the third degree, and we know that the roots are determined according to the Cardano formula. The article deals with the problem of constructing a solution to a boundary value problem for a third-order difference equation with a constant coefficient.

Keywords. difference equation with a constant coefficient of the third order, boundary value problem, general solution, characteristic equation.

Киришүү

Чектүү айырмадагы теңдемелер убакыттын дискреттик маанилериндеги динамикалык процесстердин математикалык моделдердин түзүүдө жана дифференциалдык теңдемелердин сандык ыкмалар менен чыгарууда келип чыгары бизге белгилүү. Жогорку тартиптеги сызыктуу чектүү аыйрмадагы теңдемелердин теориясы [1] монографияда кенен түрдө чагылдырылган? [3], [4] окуу куралдарында дифференциалдык теңдеменин теориясы менен чектүү аыйрмадагы теңдемелердин теорияларынын жалпылыгы жана айырмачылыктары каралып, колдонулуштары көрсөтүлгөн.

Маселенин коюулушу

Төмөндөгүдөй чектик маселени карайлы

$$a_0 y(x+3) + a_1 y(x+2) + a_2 y(x+1) + a_3 y(x) = f(x) \quad (1)$$

$$y_0(x_0) = y_0,\ y_1(x_1) = y_1,\ y_2(x_2) = y_2, \quad (2)$$

мында a_0, a_1 , a_2, a_3-турактуу сандар.

(1) чектүү айырмадагы теңдеменин, (2) чектик шартты канагаттандырган чыгарлышын табуу маселесин изилдөө. Биртектүү теңдемени алалы.

a_0 y(x+3)+a_1 y(x+2)+a_2 y(x+1)+a_3 y(x)=0 . (3)

Мүнөздөөчү теңдемени түзөлү

$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$ (4)

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 -$ (4)теңдеменин тамырлары болсун, анда $y_1(x) = \lambda_1^x, y_2(x) = \lambda_2^x, y_3(x) = \lambda_3^x$ биртектүү (3) теңдеменин фундаменталдык чыгарлыштары болот.

Теңдеменин жалпы чыгарылышы

$y = c_1\lambda_1^x + c_2\lambda_2^x + c_3\lambda_3^x + \overline{y}(x)$ (5)

функциянын негизинде жазылат.(2) чектик шарттын негизинде

,

$y(x_1) = c_1\lambda_1^{x_0} + c_2\lambda_2^{x_0} + c_3\lambda_3^{x_0} + y^0(\underline{x_0}) = y_0,$

$y(x_1) = c_1\lambda_1^{x_1} + c_2\lambda_2^{x_1} + c_3\lambda_3^{x_1} + y^0(x_1) = y_1$, (6)

$y(x_0) = c_1\lambda_1^{x_2} + c_2\lambda_2^{x_2} + c_3\lambda_3^{x_2} = y_2$

(6) системаны c_1, c_2, c_3 карата Крамердин эрежеси менен чыгарабыз.

$$C_1^0 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, C_2^0 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, C_3^0 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

Мында

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1^{x_0} & \lambda_2^{x_0} & \lambda_3^{x_0} \\ \lambda_1^{x_1} & \lambda_2^{x_1} & \lambda_3^{x_1} \\ \lambda_1^{x_2} & \lambda_2^{x_2} & \lambda_3^{x_2} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} y_0 - \overline{y}(x_0) & \lambda_2^{x_0} & \lambda_3^{x_0} \\ y_1 - \overline{y}(x_1) & \lambda_2^{x_1} & \lambda_3^{x_1} \\ y_2 - \overline{y}(x_2) & \lambda_2^{x_2} & \lambda_3^{x_2} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1^{x_0} & y_0 - \overline{y}(x_0) & \lambda_3^{x_0} \\ \lambda_1^{x_1} & y_1 - \overline{y}(x_1) & \lambda_3^{x_1} \\ \lambda_1^{x_2} & y_2 - \overline{y}(x_2) & \lambda_3^{x_2} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1^{x_0} & \lambda_2^{x_0} & y_0 - \overline{y}(x_0) \\ \lambda_1^{x_1} & \lambda_2^{x_1} & y_1 - \overline{y}(x_1) \\ \lambda_1^{x_2} & \lambda_2^{x_2} & y_2 - \overline{y}(x_2) \end{vmatrix}.$$

Демек

y(x+3)-11y(x+2)+38(x+1)-40y(x)=0 (7)

y(1)=2, y(3)=4, y(0)=1 (8)

Мүнөздөөчү теңдемени түзөбүз

$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 38\lambda - 40 = 0,$

$\lambda_1 = 2$ саны мүнөздөөчү теңдеменин тамыры экендиги текшеребиз

8-44+76-40=84-84=0, 0≡ 0

Демек

$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 38\lambda - 40 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 9\lambda + 20).$

Квадраттык теңдеменин тамырын табабыз

$\lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0$

$$\lambda_2 = \frac{+9 + \sqrt{81 - 80}}{2} = \frac{+9 + 1}{2} = 5, \lambda_3 = \frac{9 - 1}{2} = 4.$$

(7) теңдеменин жалпы чыгарлышы

$y(x) = c_1 2^x + c_2 4^x + c_3 5^x,$

туюнтмасы аркылуу жазылат. (8)чектик шартты эске алып, c_1, c_2, c_3 карата системаны алабыз

$2C_1 + 4C_2 + 5C_3 = 2,$

$8C_1 + 64C_2 + 125C_3 = 4,$

$C_1 + C_2 + C_3 = 1$

Мындан

$C_1^0 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, C_2^0 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, C_3^0 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 8 & 64 & 125 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 128 + 500 + 40 - 320 - 250 - 32 = 66,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 64 & 125 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 128 + 500 + 20 - 320 - 250 - 16 = 62,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 8 & 4 & 125 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 250 + 40 - 20 - 16 - 250 = 12$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 8 & 64 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 128 + 16 + 16 - 128 - 32 - 8 = -8$$

Мындан

$C_1^0 = \frac{62}{66}, C_2^0 = \frac{12}{66}, C_3^0 = \frac{-8}{66}.$

Демек , (7), (8) чектик маселенин чыгарлышы төмөндөгүдөй түрө жазылат

$y(x) = \frac{31}{33} \cdot 2^x + \frac{2}{11} \cdot 4^x - \frac{4}{33} \cdot 5^x.$ (9)

Мисал 2. Чектик маселенин чыгарылышын тапкыла.

$У(x + 3) - 11y(x + 2) + 38y(x + 1) - 4y(x) = 3^x,$ (10)

$y(1)=2, y(3)=4, y(0)=1$ (11)

(10) теңдеменин $y=\overline{y(x)}$ жекече чыгарылышын

$У(x) = (A + Bx)3^x,$ (12)

түрүндө издейбиз

$y(x+1)= (A+B+Bx)3^x \cdot 3,$

$y(x+2)=(A+2B+Bx)\ 3^x \cdot 9,$

$y(x+1)= (A+B+Bx)3^x \cdot 27,$

(10) теңдемеден

$27(A+3B+Bx)\ 3^X - 99(A + 2B + Bx)3^x + 114(A + B + Bx)3^x - 4(A + Bx)3^x = 3^x.$

Мындан

27A+81B+27Bx-99A-198B-99Bx+114A+114B+114Bx-4A-4Bx=1

38A-3B=1, B=0

38B=0, $A=\frac{1}{38}$

(12) эске алып (10) теңдеменин жекече чыгарлышын

$\overline{y(x)} = \frac{3^x}{38}$ (13)

турундо жазабыз.

(10) теңдемеге туура келген теңдеме (7) теңдемеге дал келгендиктен, анын жалпы чыгарлышы

$y(x)=c_1 2^x + c_2 4^x + c_3 5^x$,
түрүндө жазылат.
(13) биртектүү эмес (10) теңдеменин жалпы чыгарлышын
$y(x)=c_1 2^x + c_2 4^x + c_3 5^x + \frac{1}{38} \cdot 3^x$, (14)
түрүндө жаза алабыз. (11) чектик шарттардан турактуу C_1, C_2, C_3 карата системаны алабыз

$$2C_1 + 4C_2 + 5C_3 = 2 - \frac{3}{38} = \frac{76-3}{38} = \frac{73}{38},$$
$$8C_1 + 64C_2 + 125C_3 = 4 - \frac{27}{38} = \frac{142-27}{38} = \frac{115}{38},$$
$$C_1 + C_2 + C_3 = 1 - \frac{1}{38} = \frac{38-1}{38} = \frac{37}{38}.$$

Мындан

$$C_1^0 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, C_1^0 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, C_1^0 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

$\Delta = 66$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{73}{38} & 4 & 5 \\ \frac{115}{38} & 64 & 125 \\ \frac{37}{38} & 1 & 1 \end{vmatrix} = 61{,}105 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & \frac{73}{38} & 5 \\ 8 & \frac{115}{38} & 125 \\ 1 & \frac{37}{38} & 1 \end{vmatrix} = 11{,}210$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & \frac{73}{38} \\ 8 & 64 & \frac{115}{38} \\ 1 & 1 & \frac{37}{38} \end{vmatrix} = -8{,}052.$$

Демек,

$$C_1 = \frac{61{,}105}{66} = 0{,}925, C_2 = \frac{11{,}210}{66} = 0{,}169, C_3 = -\frac{8{,}052}{66} = -0{,}122.$$

(10),(11) чектик маселенин чыгарлышы төмөндөгүдөй түрдө жазылат.

$$y(x) = 0{,}925 \cdot 2^x + 0.169 \cdot 4^x - 0{,}122 \cdot 5^x + 0{,}026.$$

Колдонулган адабияттар:

1. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. – М.: Наука, 1967. – 376 с.
2. Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. – Киев: Наукова думка,1977. – 248 с.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 430 с.
4. Коврижных А.Ю., Коврижных О.О. Дифференциальные и разностные уравнение. Учебное пособи. – Екатеринбург: Урал. университет, 2014. – 148 с.
5. Комаров М.А. Линейние разностные уравнения и их приложения. Учебное пособие. – Владимир: Владимир. университет, 2012. – 42 с.

Рецензент: физ.- мат. илим. док., проф. Бийбосунов Б.И.