

УДК: 519.866.2

DOI 10.33514/1694-7851-2023-2-471-475

**Давлятова Б.**

доц.

И. Раззаков атындагы Кыргыз мамлекеттик техникалык университети

Бишкек ш.

buzira\_07@mail.ru

**Курманбек уулу Т.**

техн. илим. док., проф. м.а.

И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети

Бишкек ш.

## РЕГРЕССИЯЛЫК МОДЕЛДЕРДИН КАЛДЫКТАРЫНЫН АВТОКОРРЕЛЯЦИЯСЫ ТУУРАЛУУ

**Аннотация:** Регрессиялык моделдердин калдыктарынын автокорреляциясынын көйгөйлөрү, аларды табуунун жана жоюунун ыкмалары каралат. Автокорреляцияны табуунун жаны ыкмасы сунушталат. Кыргызстандын ички дүң продукциясын (ИДП) 2000–2020 жж. көрсөткүчтөрүн колдонуп моделдөөдөгү автокорреляциясын белгилүү ыкмалар жана бул статьядагы сунушталган жаны ыкма менен текшерүүнүн жыйынтыктары берилген.

**Негизги сөздөр:** эконометрия, регрессия, эң аз квадраттык ыкма, Гаусс-Марковдун шарттары, корреляция коэффициенти, автокорреляция коэффициенти, ички дүң продукция (ИДП), Дарбин-Уотсондун статистикасы, катарлардын ыкмасы.

**Давлятова Б.**

доц.

Кыргызский государственный технический университет имени И. Раззакова

г. Бишкек

buzira\_07@mail.ru

**Курманбек уулу Т.**

док. тех. наук, и.о. проф.

Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева

г. Бишкек

## ОБ АВТОКОРРЕЛЯЦИИ ОСТАТКОВ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

**Аннотация.** В статье рассматривается проблема автокорреляции остатков в регрессионных моделях, методы их обнаружения. Предлагается новый тест по обнаружению автокорреляции остатков с применением коэффициента автокорреляции. Приводятся результаты, полученные при проверке наличия автокорреляции остатков по сравнению с результатами известных методов при моделировании ВВП со статистическими данными Кыргызстана за 2000–2020 гг. и расходов на питание в США с данными за 1959–1980 гг.

**Ключевые слова:** эконометрия, регрессия, метод наименьших квадратов, условия Гаусса-Маркова, коэффициент корреляции, коэффициент автокорреляции, валовый выпуск продукции (ВВП), автокорреляция, статистика Дарбина-Уотсона, метод рядов.

**Davlyatova B.**

Associate Professor

Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakova

Bishkek c.

buzira\_07@mail.ru

**Kurmanbek uulu T.**

Doctor of Technical Sciences, Acting Professor

Kyrgyz State University named after I. Arabaeva

Bishkek c.

**ABOUT THE AUTOCORRELATION OF THE RESIDS OF REGRESSION MODELS**

**Abstract.** The problem of autocorrelation of residuals in regression models and methods for their detection are considered. A new test for detecting autocorrelation of residuals using the autocorrelation coefficient is proposed. The results obtained by checking the presence of autocorrelation of residuals are presented in comparison with the results of known methods when modeling GDP with statistical data of Kyrgyzstan for 2000–2020 and food spending in the US with data for 1959–1980.

**Keywords:** econometrics, regression, least squares method, Gauss-Markov conditions, correlation coefficient, autocorrelation coefficient, gross output (GDP), autocorrelation, Durbin-Watson statistics, series method.

Рассмотрим линейную регрессионную модель в общем виде:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n + \varepsilon, \quad (1)$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – независимые переменные,  $y$  – зависимая переменная,  $\varepsilon$  – остатки или ошибки модели.

На практике строится уравнение регрессии на основе выборочных значений переменных  $y, x_1, x_2, \dots, x_n$ , т.е. эмпирическое уравнение регрессии

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n + e. \quad (2)$$

Качество регрессионных моделей существенно зависит от свойств случайных отклонений модели  $\varepsilon_i$ , оценками которых являются  $e_i$ .

Известно, для получения наилучших результатов по методу наименьших квадратов (МНК), необходимо выполнение условий Гаусса-Маркова и одним из них является некоррелированность случайных остатков  $\varepsilon_i$ , т.е. должна отсутствовать автокорреляция остатков.

При невыполнении этого условия имеют место следующие последствия:

1. Оценки являются неэффективными;
2. Дисперсии оценок являются смещенными;
3. По указанным причинам, выводы, сделанные относительно коэффициентов регрессии и о коэффициенте детерминации, могут быть неверными. Следовательно, ухудшаются прогнозные качества модели.

Для обнаружения автокорреляции остатков модели существуют известные методы: графический анализ, тест Дарбина-Уотсона, метод рядов [1] – [2].

Метод рядов можно применять при объеме выборки  $n < 40$ ,  $n = n_1 + n_2$

$n_1 < 20$ ,  $n_2 < 20$ , где  $n_1$  – количество положительных отклонений,  $n_2$  – количество отрицательных отклонений.

Тест Дарбина-Уотсона имеет свои ограничения такие, как:

- применяется только для моделей, имеющих свободный член;
- предполагается, что случайные отклонения подчиняются к итерационной схеме  $\varepsilon_i = \rho \cdot \varepsilon_{i-1} + v_i$ ;
- статистические данные должны иметь одинаковые периодичности;
- тест Дарбина-Уотсона не применим для авторегрессионных моделей;
- наличие неопределенной ситуации.

В данной статье предлагается новый тест по обнаружению автокорреляции остатков, который не имеет приведенных ранее недостатков по статистике Дарбина-Уотсона.

Как нам известно, статистика Дарбина-Уотсона определяется, основываясь на выборочный коэффициент корреляции между соседними остатками

$$r_{i,i-1} = \frac{\sum e_i e_{i-1}}{\sqrt{\sum e_i^2 \sum e_{i-1}^2}}. \quad (3)$$

Возникает вопрос: можно ли использовать сам выборочный коэффициент корреляции между соседними остатками для обнаружения автокорреляции?

Приведем теоретическую часть этого предположения. Проверяется статистическая значимость выборочного коэффициента корреляции между остатками модели. Проведем испытание следующей гипотезы:

$H_0$ : Между остатками нет коррелированности, т.е.  $\rho_{i,i-1} = 0$ .

$H_1$ : Между остатками модели существует линейная связь:  $\rho_{i,i-1} \neq 0$ .

Испытание данной гипотезы проводится с помощью  $t$  – критерия. Проверочная статистика:

$$t = \sqrt{\frac{r_{i,i-1}^2 \cdot (n - m - 1)}{(1 - r_{i,i-1}^2)}}, \quad (4)$$

где  $n$  – объем выборки,  $m$  – число независимых переменных модели. Сравнивая значение проверочной статистики со значением  $t_{\alpha/2;n-m-1}$ , сделаем выводы:

- при  $t < t_{\alpha/2;n-m-1}$  принимается  $H_0$ , т.е.  $\rho_{i,i-1} = 0$ , между остатками нет коррелированности.
- при  $t > t_{\alpha/2;n-m-1}$  принимается  $H_1$ , т.е.  $\rho_{i,i-1} \neq 0$ , соседние остатки коррелированы между собой.

Кроме того, при  $r_{i,i-1} \geq 0$ , можно говорить о наличии положительной автокорреляции, а при  $r_{i,i-1} \leq 0$  об отрицательной автокорреляции.

Изложенный способ был применен для обнаружения автокорреляции остатков при моделировании ВВП в зависимости от объема промышленной продукции и инвестиций в основной капитал с данными КР ([4] – [8]), также при моделировании расходов на питание от личных располагаемых доходов с данными США др. Полученные результаты применения этого способа и результаты сравнения с известными методами, приведены в следующей таблице:

Таблица 1

Методы	Модель ВВП (КР)	Результаты обнаружения автокоррел. ост.	Модель расходов на питание (США)	Результаты обнаружения автокоррел. ост.
Тест Дарбина-Уотсона	$DW = 1.88$	Автокорр. отсут.	$DW=1,428$	Неопределенность
Метод рядов	$k=10,$ $k_1=6, k_2=16$	Автокорр. отсут.	$k1=6, k2=16, k=10$	Автокорр. отсут.
По тесту с применением $r_{i,i-1}$	$r_{i,i-1}=0.105,$ $t=0.44, t_{крит}=2,11,$ $\alpha=0.05$	Автокорр. отсут.	$r_{i,i-1}=0,25, t=1,13,$ $t_{крит}=2,093, \alpha=0,05$	Автокорр. отсут.

Кроме того, экспериментальным путем показано, что при обнаружении автокорреляции остатков с помощью теста Дарбина – Уотсона и методом рядов, этот факт также обнаруживает с применением теста коэффициента корреляции  $r_{i,i-1}$ . Приведем результаты проверки для модели расходов на питание с данными США [3] до устранения автокорреляции остатков:

Методы	Модель расходов на питание (США)	Результаты обнаружения автокоррел. остатков
Тест Дарбина-Уотсона	$DW=0.778$	Имеется положительная автокорреляция
Метод рядов	$k1=7, k2=17, k=6$	Автокорр. отсут. Имеется положительная автокорреляция
По тесту с применением $r_{i,i-1}$	$r_{i,i-1}=0,597, t=3,33, t_{крит}=2,093, \alpha=0,05$	Автокорр. отсут. Имеется положительная автокорреляция

Теперь рассмотрим результаты для модели ВВП с данными КР до устранения автокорреляции остатков, обнаруженного по тесту Дарбина-Уотсона:

Методы	Модель ВВП (КР)	Результаты обнаружения автокорреляции остатков
Тест Дарбина-Уотсона	$DW=1.149$ $d_l=1.05, d_u=1,53$	Имеется положительная автокорреляция
Метод рядов	$k1=6, k2=17, k=8$	Автокорреляция отсутствует
По тесту с применением $r_{i,i-1}$	$r_{i,i-1}=0,364, t=1,61, t_{крит}=2,11, \alpha=0,05$	Автокорреляция отсутствует

В случае модели ВВП с данными КР, по тесту Дарбина-Уотсона обнаруживается автокорреляция остатков, а по методу рядов и по предложенному тесту с применением  $r_{i,i-1}$ , автокорреляция отсутствует.

Одной из причин такого несоответствия могут быть допущения, сделанные для определения границ областей принятия, отклонения нулевой гипотезы и зон неопределенности по тесту Дарбина-Уотсона.

Для того чтобы уточнить, какой вариант более реалистичен, можно воспользоваться точечным графиком остатков модели:

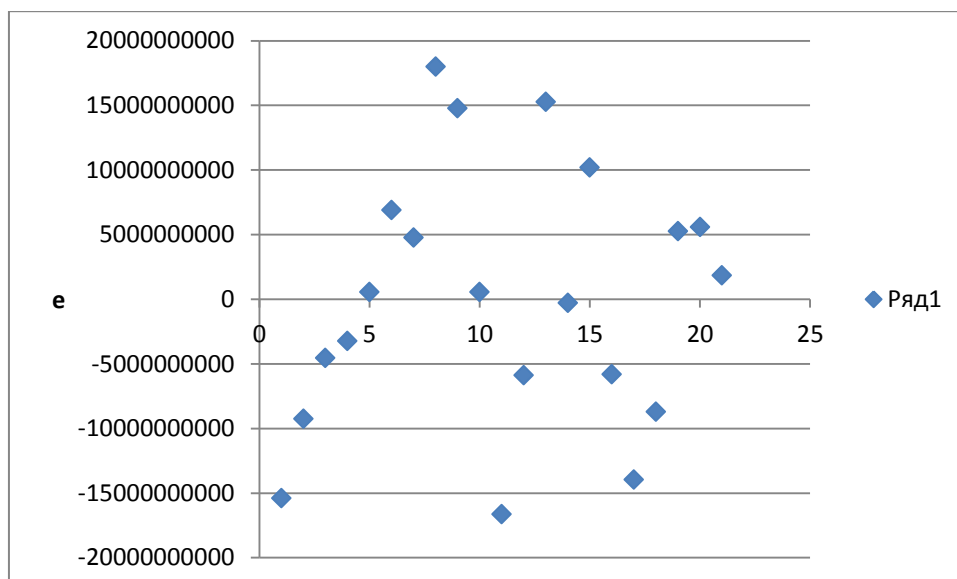


Рис. 1. График остатков модели

По графику остатков модели видно, что остатки расположены беспорядочно, не наблюдается связи между ними, следовательно, отсутствует автокорреляция. Этим фактом можно подтвердить правильность результата, полученного методом рядов и с применением предложенного теста на основе  $r_{i,i-1}$ .

Вывод: Для обнаружения автокорреляции остатков, наряду с известными методами, можно применять и изложенный автором метод с использованием коэффициента автокорреляции (1).

#### Список использованной литературы:

1. Бородич С.А. Эконометрика. – Мн.: Новое знание, 2001. – 408 с.
2. Давлятова Б.Д. Введение в эконометрику. – Бишкек.: ИЦ «Техник», 2012. – 122 с.
3. Доугерти К. Введение в эконометрику / пер с англ. – М., 1997.
4. Кыргызстан в цифрах. – Бишкек, 2005. – 321 с.: nsc\_mail@stat.kg.
5. Кыргызстан в цифрах. – Бишкек, 2010. – 334 с.: nsc\_mail@stat.kg.
6. Кыргызстан в цифрах. – Бишкек, 2015. – 341 с.: nsc\_mail@stat.kg.
7. Кыргызстан в цифрах. – Бишкек, 2018. – 343 с.: nsc\_mail@stat.kg.
8. Кыргызстан в цифрах. – Бишкек, 2021. – 344 с.: nsc\_mail@stat.kg.

Рецензент: док. физ.-мат. наук, проф. Бийбосунов Б.И.