УДК: 372.851.
DOI 10.33514/1694-7851-2023-2-505-510

Солтонкулова Ж.М.
физ.-мат. илим. канд., доц. м.а.
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.
soltonkulova77@mail.ru
Нуркамил кызы Б.
магистрант
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.
Шаршеналы кызы А.
магистрант
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.

СЫЗЫКТУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЖАЛПЫ ЧЫГАРЫЛЫШЫН ТУРГУЗУУ МАСЕЛЕЛЕРИН КОШУМЧА БИЛИМ БЕРҮҮ СИСТЕМАСЫНДАГЫ КАРАЛЫШЫ

Аннотация. Макалада сызыктуу дифференциалдык теңдемелерди окутуу жана Лагранждын методу менен жалпы чыгарылышын табуу маселелери каралат. Изилдөөнүн актуалдуулугу, биринчиден сызыктуу теңдемелердеги түшүнүктөрдүн толуктугу жана анын чыгарылыштарын табуу методдорунун көп түрдүүлүгү, экинчиден теңдеме келтирилүүчү маселелердин практикалык багыттуулугу, үчүнчүдөн кошумча билим берүү системасындагы сабактарды уюштуруудагы маанилүүлүгү.

Негизги сөздөр: сызыктуу дифференциалдык теңдемелер, Лагранждын методу, жалпы чыгарылыш, кошумча билим берүү система.

Солтонкулова Ж.М.
канд. физ.-мат. наук, и.о. доц.
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
г. Бишкек
soltonkulova77@mail.ru
Нуркамил кызы Б.
магистрант
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
г. Бишкек
Шаршеналы кызы А.
магистрант
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
г. Бишкек

РАССМОТРЕНИЕ ВОПРОСОВ ПОСТРОЕНИЯ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СИСТЕМЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы преподования линейных дифференциальных уравнений и методы их решения согласно Лагранжу. Актуальность данного исследования определяется тем, что, во-первых, линейные дифференциальные уравнения являются в полной мере обучаемым разделом теории дифференциальных уравнений, во-вторых имеется достаточно большое количество примеров и задач, которые имеют практическую направленность, и, в-третьих, результаты исследования имеют практическое значение для организации занятий в системе дополнительного образования по применению методов дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: линейные дифференциальные уравнения, метод Лагранжа, общее решение, система дополнительного образования.

Soltonkulova Zh.M.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Acting Associate Professor
Kyrgyz State University named after I. Arabaeva
Bishkek c.
soltonkulova77@mail.ru
Nurkamil kyzy B.
Master's Student
Kyrgyz State University named after I. Arabaeva
Bishkek c.
Sharshenali kyzy A.
Master's Student
Kyrgyz State University named after I. Arabaeva
Bishkek c.

CONSIDERATION OF THE ISSUES OF CONSTRUCTING A GENERAL SOLUTION OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE SYSTEM OF ADDITIONAL EDUCATION

Abstact. The article deals with the teaching of linear differential equations and the method of their solution according to Lagrange. The relevance of this study is determined by the fact that, firstly, linear differential equations are fully taught sections of the theory of differential equations, secondly, there are a sufficient number of examples and tasks that have a practical focus, and thirdly, the results of the study are of practical importance for organizing classes in system of additional education on the application of methods of differential equations.

Keywords: linear differential equations, Lagrange method, general solution, additional education system.

Дифференциалдык теңдемелерге келтирилүүчү биринчи маселелер, XVII кылымда кездешкендиги бизге белгилүү. Мындай изилдөөлөргө Р. Декарттын оптикадагы жарыктын сынышын жана тегиздиктеги ийри сызыкка жүргүзүлгөн жаныманын теңдемесин түзүүдөгү эмгегин атоого болот. «Дифференциалдык теңдеме» терминди биринчи жолу Лейбниц, И. Ньютонго жазган катында (1676) колдонуп, ал басуудан 1684 жарык көргөн. Убакыттын өтүшү менен математика илими адамдардын ишмердүүлүгүнүн көптөгөн чөйрөлөрүндө колдонулуп, азыркы учурда илим жана техниканын көптөгөн маселелерин чечүүдө кеңири колдонулуп жүрөт. Илимдин көптөгөн областарынын өз ара байланыштары күчөп, бул жагдай математика илиминин өнүгүшүнө жана анын жаңы идеялары, методдорунун пайда болушуна өбөлгө түздү. Математика илиминде, анын жаңы разделдери жана предметтери пайда боло баштады. Мындай разделдердин бири «дифференциалдык теңдеме» предмети.

Дифференциалдык теңдеме предметинин элементтери мектептик курстун программаларында камтылган. Жогорку окуу жайлардын математика факультеттеринде билим берүүнүн стандарттарына ылайык «дифференциалдык теңдемелер» курсу базалык предмет катары каралып, анын «кадимки жана жекече туунду», - сыяктуу бөлүмдөрү, математика факультеттердин жогорку курсундагы группаларында окулууда. «Дифференциалдык теңдеме», курсунда, сызыктуу дифференциалдык теңдемелер өзгөчө мааниге ээ. Буга себеп, мындай теңдемелерге коюлган түшүнүктөр толук коюлуп, аларды чыгаруу ыкмалары кеңири каралат. Мындай жагдай сызыктуу теңдемелерге көңүл буруу жана аны окутуу актуалдуу маселе экендигин тастыктап турат.

Экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес дифференциалдык теңдеме берилсин

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = f(x), \quad (1)$$

мында $p_1(x), p_2(x), f(x)$ функциялары үзгүлтүксүз $[a, b]$ областында аныкталган белгилүү функциялар. Теңдеменин өзгөчө чыгарылышы жок, - деп эсептейбиз.

(1) теңдеменин чыгаралышын тургузууну төмөндөгүдөй схема аркылуу жүргүзүү максатка ылайыктуу:

1) бир тектүү сызыктуу дифференциалдык теңдеменин

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = 0, \quad (2)$$

жалпы чыгаралышын, анын жекече чыгарылыштары аркылуу тургузабыз. Студенттерге жекече чыгарылыштардын көптүгүн табуу, жалпы учурда өтө эле кыйын маселе экендигин эскертүү зарыл;

2) бир тектүү эмес (1) теңдеменин кандайдыр бир жекече чыгарылышын $y^1(x)$ табабыз жана бир тектүү теңдеменин жалпы чыгарылышы $y^2(x)$ менен жекече чыгарылыштын суммасы, (1) теңдеменин жалпы чыгарылышы экендигин көрсөтөбүз;

3) тыянак чыгарабыз.

Биринчи этапка ылайык, (2) системанын жекече чыгарылыштарын табуу жалпы учурда аныктоо мүмкүн эмес. Ошондой, болсо да, турактуу коэффициенттүү дифференциалдык теңдемелер үчүн, бул маселе толугу менен чечилерин студенттерге маалымдоо менен, аны табууга кеңири токтолобуз.

$$y''(x) + p_1y'(x) + p_2y(x) = 0, \quad (3)$$

мында p_1, p_2 – турактуу сандар, бир тектүү турактуу коэффициенттүү сызыктуу экинчи тартиптеги дифференциалдык теңдеме, - деп аталат. Теңдемени Эйлердин методу менен чыгарабыз. Эйлердин методуна ылайык (3) теңдеменин чыгарылышын $y = e^{\lambda x}$ түрүндө издейбиз:

$$y(x) = e^{\lambda x}, y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}.$$

(3) теңдемеден

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + p_1\lambda + p_2) = 0, \;\; e^{\lambda x} \neq 0$$

болгондуктан, мындан

$$\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0, \tag{4}$$

квадраттык теңдемени алабыз.

Төмөндөгүдөй учурлардын болушу мүмкүн:

1. дискриминант $D = p_1^2 - 4p_2 > 0$.
2. дискриминант $D = 0$.
3. дискриминант $D < 0$.

(3) теңдеменин жалпы чыгарылыштары төмөндөгүдөй формула аркылуу жазылары белгилүү:

1. $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$.
2. $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_1 x}$.
3. $y(x) = e^{\lambda x}(c_1 \sin\beta x + c_2 \cos\beta x)$.

$$y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + p_2 y^{(n-2)}(x) + \cdots + p_{n-1} y'(x) + p_n y(x) = 0. \tag{5}$$

Теңдеменин мүнөздөөчү алгебралык теңдемесин түзөлү:

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0. \tag{6}$$

Комплекстүү сандардын көптүгүндө n – чи даражадагы алгебралык теңдеменин n сандагы тамыры бар экендиги жогорку алгебра курсунда белгилүү. Бул жыйынтыктын теориялык мааниси өтө эле зор. Ал эми тамырларды айкын түрдө, формула аркылуу жазуу $n > 3$ учур үчүн жалпы учурда мүмкүн эмес. Бул жагдай орчундуу проблема экендигин студенттерге жогорку алгебра курсунда көрсөтүлө тургандыгы жөнүндөгү маалыматты берүү зарыл.

Экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес (1) теңдемеге кайрылалы:

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = f(x).$$

Теңдеменин жалпы чыгарылышын Лагранждын методу менен табабыз (ыкманы көпчүлүк учурда турактууну вариациялоо ыкмасы, - деп аташат). (1) теңдеменин чыгарылышын

$$y(x) = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2. \tag{7}$$

түрүндө издейбиз. Мында $c_1(x), c_2(x)$ тандалынып алынуучу функциялар, $y_1(x), y_2(x)$ функциялары бир тектүү теңдемелердин жекече чыгарылыштары. (7) барабардыкты дифференцирлейбиз:

$$y'(x) = c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_1y_1' + c_2y_2'. \tag{8}$$

$$c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0, \tag{9}$$

анда

$$y''(x) = c_1'y_1' + c_2'y_2' + c_1y_1'' + c_2y_2''. \tag{10}$$

(7), (8), (10) барабардыктарды (1) теңдемеге коюп, c_1, c_2 – ге карата бирдей мүчөлөрүн топтоштурсак анда:

$$c_1(y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1) + c_2(y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2) + c_1'y_1 + c_2'y_2 = f(x).$$

Мындан $y_1(x), y_2(x)$ бир тектүү теңдемелердин жекече чыгарылыштары экендигин эске алсак, анда

$$c_1y_1' + c_2y_2' = f(x) \tag{11}$$

барабардыгы келип чыгат. Система түзөбүз:

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0, \\ c_1y_1' + c_2y_2' = f(x). \end{cases}$$

Мындан

$$c_1'(x) = \frac{-f(x)y_2(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)}, \tag{12}$$

$$c_2'(x) = \frac{f(x)y_1(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)}. \tag{13}$$

$y_1(x), y_2(x)$ сызыктуу көз каранды эмес функциялар болгондуктан

$$y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \neq 0, \;\; x \in [a,b].$$

(12), (13) барабардыктардан

$$c_1(x) = \bar{c}_1 + \int \frac{-f(s)y_2(s)}{y_1(s)y_2'(s) - y_2(s)y_1'(s)} ds,$$

$$c_2(x) = \bar{c}_2 + \int \frac{-f(s)y_1(s)}{y_1(s)y_2'(s) - y_2(s)y_1'(s)} ds$$

туюнтмаларын алабыз. $c_1(x), c_2(x)$ маанилерин (7) барабардыкка коёбуз, анда:

$$y(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x) + \int \frac{y_1(s)y_2(x) - y_2(s)y_1(x)f(s)}{y_1(s)y_2'(s) - y_2(s)y_1'(s)} ds \tag{14}$$

(14) формула Лагранждын методу боюнча табылган бир тектүү эмес (1) теңдеменин жалпы чыгарылышы.

Мисал 1.

$$y''(x) + y(x) = \frac{1}{\sin x}, \tag{15}$$

теңдеменин жалпы чыгарылышын табалы. Бул теңдемеде $p_1(x) = 0, p_2(x) = 1$, $f(x) = \frac{1}{\sin x}$. Эйлердин методун колдонуп бир тектүү

$$y''(x) + y(x) = 0,$$

теңдеменин жалпы чыгарылышын табабыз.

Мүнөздөөчү теңдемени түзүп, анын жалпы чыгарылышын табабыз:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \lambda = i \;\; \Rightarrow \;\; y_1(x) = \sin x, \;\; y_2(x) = \cos x.$$

Мындан

$$y_1'(x) = \cos x, \;\; y_2'(x) = -\sin x$$

(14) формуладан

$$y(x) = \bar{c}_1 \sin x + \bar{c}_2 \cos x - \left(\int \frac{f(x)y_2(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)} dx\right) \sin x +$$

$$+\bar{c}_2 \cos x - \left(\int \frac{f(x)y_1(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)} dx\right) \cos x = \bar{c}_1 \sin x + \bar{c}_2 \cos x -$$

$$-\left(\int \frac{\cos x}{-(sin^2x + cos^2x)sinx} dx\right) \sin x + \left(\int \frac{\sin x}{-(sin^2x + cos^2x)sinx} dx\right) \cos x =$$

$$= \bar{c}_1 \sin x + \bar{c}_2 \cos x + \left(\int \frac{dsinx}{sinx}\right) sinx - \left(\int dx\right) cosx =$$

$$= \bar{c}_1 \sin x + \bar{c}_2 \cos x + sinxln|sinx| - xcosx,$$

$\bar{c}_1, \bar{c}_2$ – каалагандай турактуу сандар.

(15) мисалдагы теңдеменин жалпы чыгарылышы төмөндөгүдөй формула боюнча аныкталат

$$y(x) = \bar{c}_1 \sin x + \bar{c}_2 \cos x + sinxln|sinx| - xcosx.$$

Төмөндөгүдөй теңдемени карайлы

$$y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = f\big(x, y(x)\big). \qquad (16)$$

Лагранждын (14) формуласынын негизинде (16) теңдемени интегралдык теңдемеге келтирүүгө болот жана

$$y(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x) + \int\limits_0^x K(s,x) f\big(s, y(s)\big) ds, \qquad (17)$$

мында

$$K(s,x) = \frac{y_1(s)y_2(x) - y_2(s)y_1(x)f(s)}{y_1(s)y_2'(s) - y_2(s)y_1'(s)}.$$

(17) теңдемени удаалаш жакындаштырып чыгаруу методун колдонуп, (16) дифференциалдык теңдеменин жакындаштырылган жалпы чыгарылышын алууга болот:

$$y_k(x) = \bar{c}_1 y_1(x) + \bar{c}_2 y_2(x) + \int\limits_0^x K(s,x) f\big(s, y_{k-1}(s)\big) ds, \;\; k = 1,2, \dots \qquad (18)$$

Мисал 1. Берилген теңдеменин жакындаштырылган жалпы чыгарылышын тапкыла:

$$y''(x) + y(x) = \frac{y^2(x)}{\sin x}, \qquad (19)$$

мында

$$f\big(x, y(x)\big) = \frac{y^2(x)}{\sin x},$$

$$K(s,x) = -\frac{\sin s \cos x - \cos s \sin x}{sin^2 s + cos^2 s} = \sin s \cos x - \cos s \sin x.$$

(17) теңдемеден төмөнкүдөй интегралдык теңдемени алабыз:

$$y(x) = \bar{c}_1 \sin x + \bar{c}_2 \cos x + \int\limits_0^x (\cos s \cdot \sin x - \sin s \cdot \cos x) \frac{y^2(s)}{\sin s} ds$$

$y_0(x) = y_0$ – берилген сан, (18) схеманын негизинде (19) биринчи жакындаштырылган жалпы чыгарылышын табабыз:

$$y_1(x) = \bar{c}_1 \sin x + \bar{c}_2 \cos x + \int\limits_0^x (\cos s \cdot \sin x - \sin s \cdot \cos x) \frac{{y_0}^2}{\sin s} ds =$$

$$= \bar{c}_1 \sin x + \bar{c}_2 \cos x + {y_0}^2 (\sin x ln|\sin x| - x \cos x).$$

Колдонулган адабияттар:

1. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1963. – 546 с.
2. Лизоркин Б.Н. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. – М.: Наука, 1981. – 384 с.
3. Амелкин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: КД Либроком, 2012. – 208 с.
4. Лобанова Н.И. Элементы теории дифференциальных уравнений в системе дополнительного образования // Мир науки: интернет-журнал. – 2016. – Т. 4. – №6.
5. Доусон М. Программируем на Python. – СПб.: Питер, 2014. – 416 с.

Резензент: физ.-мат. илим. док., проф. м.а. Алымбаев А.Т.