УДК: 517.938.5: 517.93: 517.956
DOI 10.33514/1694-7851-2025-3/2-251-257

Кутанов А.
физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.
Асылбекова К.Дж.
ага окутуучу
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.
Солтонкулова Ж.М.
физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.
soltonkulova77@mail.ru

КЕЧИККЕН АРГУМЕНТТҮҮ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН ЧЕКТИК МАСЕЛЕ

Аннотация. Бул макалада кечиккен аргументтүү экинчи даражадагы сызыктуу эмес дифференциалдык теңдеме үчүн чектик маселе каралат. Маселенин өзгөчөлүгү – кечиккен аргументтин же алдыга жылуусу үзгүлтүксүз u(x) функциясы аркылуу берилгенинде, ал функция системанын мурдагы же келечектеги абалынан көз каранды болушу мүмкүн. Маселенин чыгарылышы үчүн атайын E көптүгүнөн баштапкы шарттарды берүү талап кылынат. Теңдеме айрым өзгөрмөлөр аркылуу кайра түзүлүп, нөлдүк чектик шарттарга ээ болгон эквиваленттүү формага келтирилет. Макалада Грин оператору да камтылган өзгөчө интегралдык операторлор киргизилет. Тиешелүү оператордун толук үзгүлтүксүздүгү далилденген. Эгер функция f үчүн чектелүү болуу же Липшиц шарты аткарылса, анда параметр λ өтө кичине маанилерде болгондо, маселенин жок дегенде бир чыгарылышы бар экени көрсөтүлөт. Ал эми кыйла катуу шарттарда – чыгарылышы жалгыз гана болот. Маселени анализдөөдө функционалдык анализдин негизги принциптери – Шаудер принциби жана Банахтын кыскартуучу операторлор жөнүндөгү теоремасы колдонулат.

Негизги сөздөр: Чектик маселе, дифференциалдык теңдеме, аргумент, оператор, Липшицанын шарты, кичине параметр.

Кутанов А.
кандидат физико-математических наук, доцент
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
г. Бишкек
Асылбекова К.Дж.
старший преподаватель
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
г. Бишкек
Солтонкулова Ж.М.
кандидат физико-математических наук, доцент

Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
г. Бишкек

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТАМ

Аннотация. В статье рассматривается краевая задача для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом. Особенность задачи заключается в том, что аргумент отклонения задан непрерывной функцией u(x), которая может описывать как запаздывание, так и упреждение. Решение задачи требует задания начальных условий на специальном множестве E. Применяется преобразование переменных, приводящее уравнение к эквивалентному виду с нулевыми краевыми условиями. Вводятся специальные интегральные операторы, включая оператор Грина. Доказана полная непрерывность соответствующего оператора. При выполнении условий ограниченности или Липшица на функцию f, задача имеет по крайней мере одно решение для малых значений параметра λ, а при более строгих условиях – единственное решение. Используются принципы функционального анализа: принцип Шаудера и теорема Банаха о сжимающем отображении.

Ключевые слова: Краевая задача, дифференциальное уравнение, аргумент, оператор, условие Липшица, малый параметр.

Kutanov A.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Kyrgyz state university named after I. Arabaev
Bishkek c.
Asylbekova K.J.
Senior Lecturer
Kyrgyz state university named after I. Arabaev
Bishkek c.
Soltonkulova Zh.M.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Kyrgyz state university named after I. Arabaev
Bishkek c.

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION WITH DEVIATING ARGUMENT

Abstract. This paper considers a boundary value problem for a nonlinear second-order differential equation with a deviating argument. The peculiarity of the problem lies in the fact that the deviating argument is given by a continuous function u(x), which may describe either delay or advance. The solution of the problem requires specifying initial conditions on a special set E. A change of variables is applied, transforming the equation into an equivalent form with zero boundary conditions. Special integral operators, including the Green’s operator, are introduced. The complete continuity of the corresponding operator is proven. Under the boundedness or Lipschitz conditions imposed on the function f, the problem has at least one solution for small values of the parameter λ, and under stricter conditions, a unique solution. The principles of functional analysis are used, including Schauder’s fixed point theorem and Banach’s contraction mapping theorem.

Keywords: boundary value problem, differential equation, argument, operator, Lipschitz condition, small parameter.

Введение. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом занимают важное место в современной математике и её приложениях. Такие уравнения моделируют процессы, в которых текущее состояние системы зависит не только от настоящего момента времени, но также от её состояния в прошлом или будущем. Это делает их особенно актуальными при описании динамики систем с памятью или предсказанием, встречающихся, например, в биологических, инженерных, экономических и экологических моделях. Научный интерес к краевым задачам для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом обусловлен их сложностью и неоднозначностью в анализе. Классические методы, применимые к обычным дифференциальным уравнениям, часто оказываются неприменимыми или требуют значительной модификации при наличии отклоняющегося аргумента, особенно если последний задан не постоянным сдвигом, а непрерывной функцией u(x), что существенно усложняет анализ.

Особое внимание в литературе уделялось уравнениям с запаздыванием ($u(x)\le x$), тогда как случаи с упреждением ($u(x)>x$) или более общие – с переменным характером отклонения – остаются менее изученными. Первопроходцами в этой области были Л.Э. Эльсгольц [1], Г.А. Каменский [2], С.Б. Норкин [3], Мышкин А.Д. [4], и др., которые разработали фундаментальные методы анализа таких уравнений и заложили основу для дальнейших исследований.

В работе Кутанова А., Асылбековой К.Дж. и Солтонкуловой Ж.М. предложен приближенный метод пошагового интегрирования дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом, который послужил основой для разработки методики решения рассматриваемой краевой задачи [5].

В настоящей работе рассматривается краевая задача для **нелинейного дифференциального уравнения второго порядка** с отклоняющимся аргументом общего вида. Аргумент отклонения задаётся произвольной непрерывной функцией u(x), что охватывает как запаздывающие, так и упреждающие случаи. Задача исследуется на конечном отрезке [a,b], при этом начальные условия задаются не в классическом смысле, а на **специально определённом множестве** E, зависящем от функции u(x). Это создаёт дополнительные трудности в постановке и анализе задачи.

Для анализа задачи применяется метод преобразования переменных, позволяющий свести исходную краевую задачу к эквивалентной задаче с **однородными граничными условиями.** Такой подход упрощает дальнейшее исследование. Введены специальные интегральные операторы, включая **оператор Грина,** посредством которых исходное дифференциальное уравнение переписывается в виде **интегрального уравнения с оператором**. Это позволяет применять **методы функционального анализа**, в частности, **принцип Шаудера** и **теорему Банаха о сжимающем отображении** для доказательства существования и единственности решения.

Таким образом, цель настоящей работы заключается в:

- постановке и корректной формализации краевой задачи с отклоняющимся аргументом;
- построении соответствующих операторов и доказательстве их свойств (непрерывности, компактности);

- получении условий существования и единственности решения в зависимости от параметра λ;
- обосновании применения известных теорем из теории функционального анализа к построенному операторному уравнению.

Научная новизна работы заключается в рассмотрении **обобщённой краевой задачи**, в которой аргумент отклонения задан произвольной непрерывной функцией, а условия заданы на нестандартном множестве E. Кроме того, использованная методика позволяет как теоретически доказать существование решения, так и может быть положена в основу **численных методов** приближённого решения таких задач.

Краевая задача ставится для уравнения

$$y''(x) = \lambda f\big(x, y(x), y'(x), u(x)\big). \quad (1)$$

Уравнение (1) рассматривается в промежутке $[a, b]$. Функция $u(x)$ непрерывна в том же промежутке. При $u(x) \le x$ имеем уравнение с запаздывающим аргументам.

Положим: $E_a = E\{u(x); u(x) < a, x \ge a\} \cup a$

$$E_b = E\{u(x); u(x) > b, x \le b\} \cup b.$$

На начальном множестве $E = E_a \cup E_b$ задается непрерывная начальная функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) \ \text{ при } \ x \in E_a \\ \varphi_2(x) \ \text{ при } \ x \in E_b. \end{cases}$$

Краевая задача ставится так: найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$y(a) = \varphi_1(a),$$
$$y(b) = \varphi_2(x),$$
$$y\big(u(x)\big) = \varphi\big(u(x)\big) \ \text{ при } \ x \in E.$$

Пусть $\tau_1 = inf u(x), \tau_2 = sup u(x)$, при этом $E_a = [\tau_1, a]$ и $E_b = [\tau_2, b]$. Тогда поставленная краевая задача означает, что отыскивается непрерывная на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$ функция, которая удовлетворяет уравнению (1) на $[a, b]$ при условии, что на граничных отрезках $[\tau_1, a]$ и $[b, \tau_2]$ она совпадает с граничными функциями $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ [1].

Краевая задача для нелинейных уравнений изучали: Л.Э. Эльсгольц [1], Г.А. Каменский [2], С.Б. Норкин [3] и др. В этих работах рассмотрен случай запаздывания $u(x) \le x$. Л.Э. Эльсгольц в работе [1] дает метод решения по шагом краевой задачи для нелинейного уравнения общего вида.

Введем новые переменные:

$$x = a + (b - a)t,$$
$$y(u) = z(t) + \varphi_1(a) + \frac{\varphi_2(b) - \varphi_1(a)}{b - a}(x - a),$$
$$\varphi_i(x) = \psi_i(t) + \varphi_1(a) + \frac{\varphi_2(b) - \varphi_1(a)}{b - a}(x - a) \quad (i = 1,2),$$

где $z(t)$ и $\psi_i(t)$ – новая неизвестная и граничные функции. Поставленная задача теперь переходит в задачу об отыскании решений уравнения вида (1), принимающих в точных 0 и 1 нулевые значения. Поэтому, сохраняя первоначальные обозначения, будем искать решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям

$$y(0) = y(1) = 0, \quad (2)$$

$$y\big(u(x)\big) = \begin{cases} \varphi_1\big(u(x)\big) \ \text{ при } \ u(x) \in E_0, \\ \varphi_2\big(u(x)\big) \ \text{ при } \ u(x) \in E_1. \end{cases} \quad (3)$$

Ясно, что теперь $\varphi_1(0) = \varphi_2(1) = 0$.

Рассмотрим краевую задачу без отклонения

$$y''(x) = v(x),$$
$$y(0) = y(1) = 0.$$

Отсюда

$$y(x) = \int_0^1 G(x,t)v(t)dt = Av(x), \qquad (4)$$

где $G(x,t)$ – функция Грина.

Оператор (4) действует в пространстве $C[0,1]$.

Положим

$$Bv(x) = \frac{d}{dx}Av(x).$$

Введем операторы

$$Dz(x) = z(u(x)).$$

$$\bar{A}v(x) = \begin{cases} \varphi(u(x)) \text{ при } u(x) \in E \\ D(Av(x)) \text{ при } u(x) \in [0,1]. \end{cases} \qquad (5)$$

Покажем, что оператор (5) вполне непрерывен. Для любой функции $v(x)$, непрерывной на $[0,1]$, положим

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) \text{ при } x \in E, \\ Av(x) \text{ при } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Функция $\Phi(x)$ непрерывна на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$. Это следует из того, что условиям (2) удовлетворяет как функция Грина, так и функция $\varphi(x)$. Функции $D\Phi(x)$ непрерывны на $[0,1]$ для любой функции $v(x)$ из $C[0,1]$.

Предположим, что $|\varphi(x)| \leq M, (M > 0)$, тогда из ограниченность функций $\bar{A}v(x)$ следует, что в силу теоремы Арцела оно компактно, оператор $\bar{A}$ в пространстве $C[0,1]$ вполне непрерывен.

Пусть функция $f(x, s_1, s_2, s_3)$ непрерывна по всем аргументом и удовлетворяет условию

$$|f(x, s_1, s_2, s_3)| \leq a + b|s_1| \qquad (6)$$

тогда при достаточно малых λ задача (1)-(3) имеет по крайней мере одно решение.

Рассмотрим оператор

$$Fv(x) = f(x, Av(x), Bv(x), \bar{A}v(x)). \qquad (7)$$

Задачи (1)-(3) эквивалентны интегральному уравнению

$$v(x) = \lambda Fv(x). \qquad (8)$$

Уравнение (8) имеет по крайней мере одно решение. Действительно, если

$$\|Av(x)\| \leq K, \ \ (v(x) \in [0,1])$$

В силу (6) имеем

$$\|\lambda Fv(x)\| \leq |\lambda| \cdot (a + b\|Av(x)\|) \leq |\lambda|(a + bK),$$

если

$$|\lambda| \leq \frac{\rho}{a + bK} \qquad (9)$$

то $\|\lambda Fv(x)\| \leq \rho$, т.е. оператор λF преобразует $C[0,1]$ в свою часть. Следовательно, в силу принципа Шаудера, уравнение (8) имеет решение.

Если $v(x)$ – решение уравнения (8), то функция

$$y(x) = Av(x) \tag{10}$$

будет решением задачи (1)-(3).

Если функция $f(x, s_1, s_2, s_3)$ удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам кроме первого, то краевая задача (1)-(3) при достаточно малых значениях λ имеет в $C[0,1]$ единственное решение. Из выполнения условия Липшица, для функции f следует, что оператор λF будет сжимающим при достаточно малых значениях λ. Действительно, для $(v_1(x), v_2(x)) \in C[0,1]$ имеем:

$$\|\lambda F v_1 - \lambda F v_2\| = |\lambda| \|f(x, Av_1, Bv_1, \bar{A}v_1) - f(x, v_2, Bv_2, \bar{A}v_2)\| \leq$$
$$\leq |\lambda| [L_1 \|Av_1 - Av_2\| + L_2 \|Bv_1 - Bv_2\| + L_3 \|\bar{A}v_1 - \bar{A}v_2\|] \leq$$
$$\leq |\lambda| [L_1 \|A\| + L_2 \|B\| + L_3 \|\bar{A}\|] \|v_1 - v_2\|,$$

где L_1, L_2, L_3 – коэффициенты Липшица.

Отсюда следует, что оператор λF будет сжимающим

$(|\lambda|[L_1\|A\| + L_2\|B\| + L_3\|\bar{A}\|] = L < 1)$, следовательно, уравнение (8) будет иметь единственное решение для тех значений параметра λ, которые удовлетворяют неравенству $L < 1$.

Если $v(x)$ – решение уравнения (8), то по формуле (10) получим единственное решение краевой задачи (1)-(3).

Заключение. В данной работе была рассмотрена краевая задача для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом, заданным в виде непрерывной функции u(x), что позволяет учитывать как запаздывающий, так и упреждающий характер зависимости. Такой подход расширяет класс рассматриваемых задач и приближает модель к реальным приложениям, где влияние прошлого или будущего состояния системы на текущее поведение невозможно игнорировать.

Основной особенностью данной задачи является то, что начальные условия задаются не только в краевых точках, но и на специальном множестве E, зависящем от формы отклонения. Это потребовало разработки обоснованного математического подхода к корректной постановке и анализу задачи.

Путём введения новой системы переменных и использования преобразований задача была сведена к эквивалентной краевой задаче с однородными граничными условиями. Это позволило применить аппарат интегральных операторов, в частности, был построен оператор Грина, а также введены связанные с ним линейные операторы A, B и $\bar{A}$, включающие в себя эффекты отклоняющегося аргумента.

Проведён теоретический анализ свойств операторов, в частности, доказана **полная непрерывность** оператора $\bar{A}$, что дало возможность применять **принцип Шаудера** для доказательства **существования хотя бы одного решения** интегрального уравнения, эквивалентного исходной краевой задаче. Далее, при наложении **условия Липшица** на нелинейную функцию f по соответствующим аргументам, была доказана **единственность решения** задачи на основе **теоремы Банаха о сжимающем отображении**.

Таким образом, в работе строго обоснована корректная постановка краевой задачи с отклоняющимся аргументом, построено её интегральное представление с использованием оператора Грина, доказано существование хотя бы одного решения при условии ограниченности функции f, а также существование и единственность решения при выполнении условий Липшица и малых значениях параметра λ; кроме того, предложена универсальная методика, подходящая как для теоретического анализа, так и для разработки численных методов. Предложенные методы могут быть использованы для дальнейшего исследования широкого класса задач с отклоняющимся аргументом, в том числе в более сложных случаях – например, в системах уравнений, уравнениях с разрывными правыми частями или при наличии запаздывания переменной длины. Полученные результаты могут также послужить теоретической базой для разработки эффективных численных алгоритмов, основанных на шаговых и итерационных методах.

Литературы

1. Эльсгольц Л.Э. О краевых задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. УМН, 15, 5 (95), 1960, – С. 222-224.
2. Каменский Г.А. Краевая задача для нелинейных уравнений с отклоняющимся аргументом. Научные доклады, Выс. Школа физ.-мат. Наук, 2. (1958), – С. 60-66.
3. Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. – М., Наука, 1965.
4. Мышкин А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М. – Л., Гостех.издат. 1951.
5. Кутанов А., Асылбекова К.Дж., Солтонкулова Ж.М. Приближенный метод пошагового интегрирования дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом. Вестник Арабаева, – Бишкек, – 2023г.

Рецензент: доктор физико-математических наук, и.о.профессор Алымбаев А.Т.