УДК 517.584

Асанов Авыт, Алмасбек кызы Бегимай
д.ф-м.н., профессор КТУ “Манас”
магистрант КТУ “Манас”

БИР ТЕКТҮҮ ЭМЕС БЕССЕЛДИН ТЕҢДЕМЕСИ ҮЧҮН ЧЕТТЕРИ БЕКИТИЛГЕН ЧЕКТИК МАСЕЛЕ

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ

A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH FIXED ENDS FOR THE INHOMOGENEOUS BESSEL EQUATION

Аннотация: Бул макалада бир тектүү эмес Бесселдин теңдемеси үчүн четтери бекитилген чектик маселе изилденген. Өзгөртүп түзүү методу жана Грин функция методунун жардамы менен Фредгольмдун экинчи же үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемесине келтирилет. Айрым учурда чектик маселенин анык формуласы алынды.

Аннотация: В статье рассматривается краевая задача с закрепленными концами для неоднородного уравнения Бесселя. При помощи метода преобразований и метода функции Грина задача сводится к линейному интегральному уравнению Фредгольма второго или третьего рода. В частном случае получена явная формула решения краевой задачи.

Annotation: In this article, we consider a boundary value problem with fixed ends for an inhomogeneous Bessel equation. Using the method of transformations and the Green's function method, the problem is reduced to a linear Fredholm integral equation of the second or third kind. In a particular case, we obtain an explicit formula for solving the boundary value problem.

Түйүндүү сөздөр: чектик маселе, Грин функциясы, Бесселдин теңдемеси, интегралдык теңдеме, Фредгольмдун экинчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемеси, Фредгольмдун үчүнчү түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемеси.

Ключевые слова: краевая задача, функция Грина, уравнения Бесселя, интегральное уравнение, линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода, линейное интегральное уравнение Фредгольма третьего рода.

Key words: boundary value problem, Green's function, Bessel equations, integral equation, Fredholm linear integral equation of the second kind, Fredholm linear integral equation of the third kind.

Введение. Во многих отраслях современной математики , физики и техники, в теории дифференциальных и интеральных уравнениях из специальных функций особо выделяются функции Бесселя. Функция Бесселя сравнительно с другими функциями предоставляет быструю и корректную сходимость решений задач , которые описывают реальные физические процессы и процессы математической физики.[1-7]. В работе Вирченко Н.А., Четвертак М.А. рассматриваются обобщеные функции Бесселя [8]. А также в работе Алымкулова К., Кожобекова К.Г рассматриваются прямые методы построения ассимтотических решений уравнения Бесселя [9]. В нашей работе при решении уравнения Бесселя применяется метод функции Грина [10-12]. и метод интегральных уравнений [13-16].

Постановка задачи

Рассматривается уравнение Бесселя

$$x^2y''+xy'+(x^2-\lambda^2)y=f(x)\ ,\ x\in[\beta,\gamma]\quad ,\beta<\gamma\ . \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$(x^{\frac{1}{2}}y(x))|_{x=\beta}=a\ ,\ y(\gamma)|=b\ . \tag{2}$$

где заданная функция $f(x)\in C[\beta,\gamma]$.

Для решении уравнения Бесселя (1) и (2) произведем замену :

$$y(x)=x^{-\frac{1}{2}}z(x)\ . \tag{3}$$

Находим первую и вторую производные функции (3):

$$y'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}z(x)+x^{-\frac{1}{2}}z'(x)$$

$$y''(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}z(x)-x^{-\frac{3}{2}}z'(x)+x^{-\frac{1}{2}}z''(x)$$

Подставляем эти производные в уравнение (1).

$$x^2(\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}z(x)-x^{-\frac{3}{2}}z'(x)+x^{-\frac{1}{2}}z''(x))+x(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}z(x)+x^{-\frac{1}{2}}z'(x))+(x^2-\lambda^2)x^{-\frac{1}{2}}z(x)=f(x)$$

После упрощения получим следующее уравнение:

$$x^2z''+(\frac{1}{4}-\lambda^2+x^2)z=f(x)x^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Из (3) находим краевые условия относительно функции $z(x)$:

$$y(x)=x^{-\frac{1}{2}}z(x)\Rightarrow z(x)=y(x)x^{\frac{1}{2}}$$

$$(x^{\frac{1}{2}}y(x))|_{x=\beta}=a\ ,\ y(\gamma)|=b \tag{5}$$

$$z(\beta)=a\quad ,z(\gamma)=b\sqrt{\gamma}\ . \tag{6}$$

Для вычисления функции $z(x)$, осуществим следующую замену в которой вводится новая функции $u(x)$:

$$z(x)=u(x)+\frac{x-\beta}{\gamma-\beta}(b\sqrt{\gamma}-a)+a\ . \tag{7}$$

Продифференцируем (7) два раза ,

$$z'(x)=u'(x)+\frac{1}{\gamma-\beta}(b\sqrt{\gamma}-a)\ ,\qquad z''=u''$$

и подставив в (4) , получим следующее уравнение с краевыми условиями :

$$x^2(u''+u)=f(x)x^{\frac{1}{2}}+(\lambda^2-\frac{1}{4})u+(\lambda^2-\frac{1}{4}-x^2)[\frac{x-\beta}{\gamma-\beta}(b\sqrt{\gamma}-a)+a]\ . \tag{8}$$

$$u(\beta)=u(\gamma)=0 \tag{9}$$

Лемма. Пусть $\beta<\gamma$ и $f(x)\in C[\beta,\gamma]$. Тогда решение краевой задачи

$$u''+u=f(x)\ ,\ x\in[\beta,\gamma]\quad . \tag{10}$$

$$u(\beta)=u(\gamma)=0$$

Имеет вид:

$$u(x)=\int_{\beta}^{\gamma}G(x,t)f(t)dt \ \ , \ x\in[\beta,\gamma]. \qquad (11)$$

где $G(x,t)$ функция Грина краевой задачи (9)-(10).

$$G(x,t)=\begin{cases}-\dfrac{\sin(t-\gamma)}{\sin(\beta-\gamma)}\sin(x-\beta)\ , \ \beta\le x\le t\le\gamma\\ -\dfrac{\sin(t-\beta)}{\sin(\beta-\gamma)}\sin(x-\gamma)\ \ , \beta\le x\le t\le\gamma\end{cases} \qquad (12)$$

Рассмотрим следующие случаи решения краевой задачи (8),(9):

1-случай . Пусть $\lambda^2=\dfrac{1}{4}$, то есть $\lambda_{1\backslash 2}=\pm\dfrac{1}{2}$. Тогда ;

$$x^2(u''+u)=f(x)x^{\frac{1}{2}}+(\frac{1}{4}-\frac{1}{4})u+(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-x^2)[\frac{x-\beta}{\gamma-\beta}(b\sqrt{\gamma}-a)+a]$$

$$x^2(u''+u)=f(x)x^{\frac{1}{2}}-x^2[\frac{x-\beta}{\gamma-\beta}(b\sqrt{\gamma}-a)+a]$$

Умножим обе части на x^{-2}:

$$u''+u=f(x)x^{-\frac{3}{2}}-[\frac{x-\beta}{\gamma-\beta}(b\sqrt{\gamma}-a)+a]\ . \qquad (13)$$

В этом случае решение краевой задачи (13), (9) с помощью функция Грина запишется в виде:

$$u(x)=\int_{\beta}^{\gamma}G(x,t)\{f(t)t^{-\frac{3}{2}}-[\frac{t-\beta}{\gamma-\beta}(b\sqrt{\gamma}-a)+a\}dt \ \ , \ x\in[\beta,\gamma] \ \ . \qquad (14)$$

Непосредственно подставляя (12) в (14) , получим :

$$u(x)=-\int_{\beta}^{x}\frac{\sin(t-\beta)}{\sin(\beta-\gamma)}\sin(x-\gamma)\{f(t)t^{-\frac{3}{2}}-[\frac{t-\beta}{\gamma-\beta}(b\sqrt{\gamma}-a)+a\}dt-$$

$$-\int_{x}^{\gamma}\frac{\sin(t-\gamma)}{\sin(\beta-\gamma)}\sin(x-\beta)\{f(t)t^{-\frac{3}{2}}-[\frac{t-\beta}{\gamma-\beta}(b\sqrt{\gamma}-a)+a\}dt \qquad (15)$$

Подставив функцию $u(x)$ в (7) , имеем;

$$z(x)=-\int_{\beta}^{x}\frac{\sin(t-\beta)}{\sin(\beta-\gamma)}\sin(x-\gamma)\{f(t)t^{-\frac{3}{2}}-[\frac{t-\beta}{\gamma-\beta}(b\sqrt{\gamma}-a)+a\}dt-$$

$$-\int_{x}^{\gamma}\frac{\sin(t-\gamma)}{\sin(\beta-\gamma)}\sin(x-\beta)\{f(t)t^{-\frac{3}{2}}-[\frac{t-\beta}{\gamma-\beta}(b\sqrt{\gamma}-a)+a\}dt+\frac{x-\beta}{\gamma-\beta}(b\sqrt{\gamma}-a)+a \qquad (16)$$

Подставив функцию $z(x)$ в (3), получим окончательное решение задачи (13),(9) :

$$y(x)=[-\int_{\beta}^{x}\frac{\sin(t-\beta)}{\sin(\beta-\gamma)}\sin(x-\gamma)\{f(t)t^{-\frac{3}{2}}-[\frac{t-\beta}{\gamma-\beta}(b\sqrt{\gamma}-a)+a\}dt]x^{-\frac{1}{2}}-$$

$$-[\int_{x}^{\gamma}\frac{\sin(t-\gamma)}{\sin(\beta-\gamma)}\sin(x-\beta)\{f(t)t^{-\frac{3}{2}}-[\frac{t-\beta}{\gamma-\beta}(b\sqrt{\gamma}-a)+a\}dt+\frac{x-\beta}{\gamma-\beta}(b\sqrt{\gamma}-a)+a]x^{-\frac{1}{2}}. \qquad (17)$$

2-случай. Пусть $\lambda^2\neq\dfrac{1}{4}$ и **а)** $\beta>0$, $\gamma>\beta>0$**,**

б) $\beta<0$, $\beta<\gamma<0$.

Сделаем подстановку.

$$\begin{cases} u'' + u = v \\ u(\beta) = u(\gamma) = 0 \end{cases} \qquad (18)$$

Отсюда находим,

$$u(x) = \int_{\gamma}^{\beta} G(x,t)v(t)dt\,. \qquad (19)$$

Подставим (18) ,(19). в уравнение (8) :

$$x^2 v = (\lambda^2 - \frac{1}{4})\int_{\beta}^{\gamma} G(x,t)v(t)dt + F(x)\,. \qquad (20)$$

где , $F(x) = f(x)x^{\frac{1}{2}} + (\lambda^2 - \frac{1}{4} - x^2)[\frac{x-\beta}{\gamma-\beta}(b\sqrt{\gamma} - a) + a]\,.$ (21)

Так как $\beta > 0$, $\gamma>\beta>0$ и $\beta < 0$, $\beta < \gamma < 0$, умножим обе части (20) на x^{-2} :

$$v(x) = \frac{(\lambda^2 - \frac{1}{4})}{x^2}\int_{\beta}^{x} G(x,t)v(t)dt + \frac{(\lambda^2 - \frac{1}{4})}{x^2}\int_{x}^{\gamma} G(x,t)v(t)dt + \frac{F(x)}{x^2}\,. \qquad (22)$$

Следовательно, имеет место следующая теорема:

Теорема 1. Пусть $\beta > 0$, $\gamma>\beta>0$ и $\beta < 0$, $\beta < \gamma < 0$.Тогда краевая задача (8)-(9) эквивалентна линейному интегральному уравнению Фредгольма второго рода (22).

Замечание 1. Линейные интегральные уравнения Фредгольма второго рода исследованы , например, в работах [13,14].

3-случай. Пусть $\lambda^2 \neq \frac{1}{4}$, $\beta = 0$, $\gamma>0$.

Для решении опять применим подстановку (18). Для этого случая,

$$u(x) = \int_{0}^{\gamma} G(x,t)v(t)dt\,. \qquad (23)$$

Подставив (18), (23) в (8), получим интегральное уравнение Фредгольма третьего рода

$$x^2 v = (\lambda^2 - \frac{1}{4})\int_{0}^{\gamma} G(x,t)v(t)dt + F(x)\,. \qquad (24)$$

Теорема 2. Пусть $\beta = 0$, $\gamma>0$. Тогда краевая задача (8)-(9) эквивалентна решению линейному интегральному уравнению Фредгольма третьего рода (24).

4-случай. Пусть $\lambda^2 \neq \frac{1}{4}$, $\beta < 0$, $\gamma = 0$.

Аналогично предыдущему случаю , пользуясь подстановкой (18), получим;

$$u(x) = \int_{\beta}^{0} G(x,t)v(t)dt\,. \qquad (25)$$

Подставив (18), (25). в (8), получим интегральное уравнение Фредгольма третьего рода:

$$x^2 v = (\lambda^2 - \frac{1}{4})\int_{\beta}^{0} G(x,t)v(t)dt + F(x)\ . \qquad (26)$$

Теорема 3. Пусть $\beta < 0$, $\gamma = 0$. Тогда краевая задача (8)-(9) эквивалентна решению линейному интегральному уравнению Фредгольма третьего рода (26).

Замечание 2. Линейные интегральные уравнения Фредгольма третьего рода исследованы, например, в работах [15,16].

Список использованной литературы:

1. Watson G.N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions* .Cambridge: University Press 1922. vi+804 pp.
2. Галицын А.С., Жуковский А.Н. *Интегральное преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности.* К.: 1986, Наука думка, 284 с.
3. Диткин В.А.,Прудников А.П. К теории операционнного исчисления , порожденного уравнениям Бесселя //*Ж. вычисл. матем . и матем .физ.* ,1963. Т.3,№2. С.223-238.
4. Коренев Б.Г. *Введение в теорию бесселевых функций* .М.: 1971, Наука , 288с.
5. Никифоров А.Ф.,Уваров В.Б.*Специальные функции математической физики*.М.: 1978, Наука ,320 с.
6. Кошляков Н.С, Глинер Э.Б.Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.:1970, Высшая школа,712 с
7. Левин В.И., Гросберг Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: 1951, Гостехиздат, 576 с.
8. Вирченко Н.А., Четвертак М.А. *Об одном обобщении функции Бесселя.*Вестн.Сам. гос. техн. ун-та.Сер. Физ.-мат. Науки, 2014 . №4 (37). С.16-21.
9. Алымкулов К., Кожобеков К.Г *Асимптотика решения уравнения Бесселя при больших значениях аргумента* // Международный студенческий вестник. 2019. №1. С.1-7.
10. Коллатц Л. Задачи на собственные значения.М.:1968.
11. Доманова.Е.Д. Михайлова.Т.Ю. Методы решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевые задачи.Функция Грина. Новосибирск учебно-методическое пособие, Н.:2012
12. Левитов Л.С. Шитов.А.В. Функция Грина.Задача с решениями. 2-е изд.,дополн.-Физматлит. М.: 2002, 362-с.
13. Манжиров А.В, Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнениям. М.:2000.
14. Краснов М.Л, Киселев А.И, Макаренко Г.И. Интегральные уравнения.М .:1968.
15. .Avyt Asanov,Kalyskan Matanova, Ruhidin Asanov. A class of linear and nonlinear Fredholm Integral Equations of the third kind //Kuwait Journal of Science, 2017,Vol.44, No 1, pp.17-28.
16. Imanaliev M.I.,Asanov A. and Asanov R.A.,” Solutions to Systems of Linear Fredholm Integral Equations of the Third kind with Multipoint Singularities” Doklady Mathematics, 95(3) (2017) 235-239.

Рецензент: к.ф-м.н., доцент Матанова К.Б.