УДК: 517.586

Асанов А., Шайымбекова Азем
д.ф-м.н., профессор КТУ “Манас”
магистрант КТУ “Манас”

БИР ТЕКТҮҮ ЭМЕС ЛЕЖАНДРДЫН ТЕҢДЕМЕСИ ҮЧҮН ЧЕТТЕРИ БЕКИТИЛГЕН ЧЕКТИК МАСЕЛЕ

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЕЖАНДРА

A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH FIXED ENDS FOR THE NONHOMOGENEOUS LEGENDRE EQUATION

Аннотация: Бул макалада Лежандр теңдемеси үчүн четтик маселе каралды. Аны изилдөө үчүн четтик маселелер жана Грин функциясы колдонулду. Лежандр теңдемесинин чектик маселени өзгөртүүлөрдүн жана Грин функциясынын жардамы менен Фредгольмдун 2-түрдөгү же 3-түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемесине келтирилди. Айрым учурда берилген четтик маселенин чыгарылышынын формуласы табылды.

Аннотация: В статье рассмотрена краевая задача для неоднородного уравнения Лежандра. Для исследования применены краевые задачи и функция Грина. Краевые условия в уравнении Лежандро были приведены в линейно-интегральное уравнению Фредгольма третьего и второго рода с помощью преобразований и функцией Грина. В частном случае получена формула решения краевой задачи.

Annotation: In this article, the boundary value problem is considered for the inhomogeneous Legendro equation. For the study, boundary value problems and the Green's function are applied. The boundary conditions in the Legendro equation were reduced to the linear-integral Fredholm equation of the third and second kind using transformations and the Green function. In special cases, a formula was found for solving boundary value problems.

Түйүндүү сөздөр: Грин функциясы, интегралдык теңдемелер, четтик маселелер, Лежандра тендемеси, Фредгольмдун 3-түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемеси, Фредгольмдун 2-түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемесине.

Ключевые слова: краевые задачи , функция Грина, уравнения Лежандро, интегральная уравнения , линейная интегральная уравнения Фредгольма второго рода , линейная интегральная уравнения Фредгольма третьего рода

Key words: boundary value problem, Green's function, Legendro equations, linear integral Fredholm equations of the second kind, linear integral Fredholm equations of the third kind,

Введение. Во многих научных работах в частности , при решении физико-математических задачах рассматривают функции, полиномы, уравнение Лежандра. Обобщенное решение уравнения Лежандра находится решается с помощью функций Лежандра. На практике функция Лежандра применяется при распространении волн,теплопроводности, колебании мембраны.

Функции , полиномы и уравнения Лежандра рассмотрены в работах
Глушак А.В [1], Д.А. Шапиро [2], Г.Бейтмен, А.Эрдейи [3]. В работах

А. А. Карацуба рассматривают суммы символов Лежандра от многочленов второй степени с простыми числами[4]. В нашей работе при решении уравнения Лежандра применяется метод интегральных уравнений [5-10]. и метод функция Грина [11-12].

Постановка задачи:

Рассматривается следующее неоднородное уравнение Лежандра

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2P}{dx^2}-2x\frac{dP}{dx}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P(x)=f(x),\quad x\in[\alpha,\beta],\ -1<\alpha<\beta<1, \tag{1}$$

со следующими краевыми условиями :

$$\begin{cases}\sqrt{1-x^2}P(x)\big|_{x=\alpha}=a\\ \sqrt{1-x^2}P(x)\big|_{x=\beta}=b\end{cases} \tag{2}$$

где $\mathrm{a},\mathrm{b}\in R.$

Для решения краевой задачи уравнение (1) и (2) произведем следующую замену :

$$P(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}Q(x) \tag{3}$$

Находим первую , вторую производные функции :

$$P'(x)=x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}Q(x)+(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}Q'(x)\ , \tag{4}$$

$$P''(x)=\left[(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}+3x^2(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}\right]Q(x)\ +\left[2x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}Q'(x)\right]+(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}Q''(x) \tag{5}$$

Подставляем (3), (4), (5) в уравнение (1) и получим

$$\left[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}+(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}3x^2-2x^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}+l(l+1)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-m^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\right]Q(x)+$$
$$+(1-x^2)^{\frac{1}{2}}Q''(x)=f(x)\ . \tag{6}$$

В уравнении (6) умножаем обе части на $(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$:

$$(1-x^2)^2Q''(x)+\left[(l(l+1)(1-x^2)-(\mathrm{m}^2-1)\right]Q(x)=f(x)(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \tag{7}$$

Тогда из условия (2) и подстановки (3) для $Q(x)$ имеем следующие краевые условия:

$$Q(\alpha)=a,\qquad Q(\beta)=b\,. \tag{8}$$

Для нахождения функции $Q(x)$, осуществим следующую замену в которой вводится новая функция $u(x)$

$$Q(x) = u(\mathrm{x}) + \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}(b-a) + a \qquad (9)$$

Продифференцируем (9) в два раза . Тогда

$$Q'(x) = u'(x) + \frac{(b-a)}{\beta-\alpha}, \qquad (10)$$

$$Q''(x) = u''(x) \ . \qquad (11)$$

Подставим (9), (10), (11) в (7) и получим

$$\left(1-x^2\right)^2 u''(x) + \left[l(l+1)(1-x^2)-(m^2-1)\right]\left[u(x) + \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}(b-a)+a\right] = f(x)(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \qquad (12)$$

Отсюда

$$\left(1-x^2\right)^2 u''(x) + \left[l(l+1)(1-x^2)-(m^2-1)\right]u(x) = F(x)\,, \qquad (13)$$

где

$$F(x) = f(x)(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \left[l(l+1)(1-x^2)-(m^2-1)\right]\left[\frac{x-\alpha}{x-\beta}(b-a)+a\right] \qquad (14)$$

Далее учитывая краевые условия (8) и подстановку (9), для $u(x)$ получим краевые условия:

$$u(\alpha) = 0, \qquad u(\beta) = 0 \qquad (15)$$

Лемма: Пусть $f(x) \in \mathrm{C}\left[\alpha,\beta\right]$. Тогда решение следующей краевой задачи

$$u''(x) = f(x), \quad x \in \left[\alpha,\beta\right], \ \alpha < \beta \ , \qquad (16)$$

$$u(\alpha) = u(\beta) = 0$$

определяется по формуле

$$u(x) = \int_\alpha^\beta G(x,t) f(t)dt, \qquad x \in \left[\alpha,\beta\right],$$

где

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{(t-\beta)}{\beta-\alpha}(x-\alpha), & \alpha \le x < t \le \beta \\ \dfrac{t-\alpha}{\beta-\alpha}(x-\beta), & \alpha \le t < x \le \beta \end{cases} \qquad (17)$$

т.е $G(x,t)$ является функцией Грина для краевой задачи (16).

Далее , для решения уравнения (13), введем обозначение

$$u''(x) = \vartheta(x), \qquad x \in \left[\alpha,\beta\right]. \qquad (18)$$

Тогда в силу условия (15) и Леммы, из (18) имеем :

$$u(x) = \int_\alpha^\beta G(x,t)\vartheta(t)dt, \qquad x \in \left[\alpha,\beta\right], \qquad (19)$$

где $G(x,t)$ определена по формуле (17) .

Далее подставим (18) и (19) в уравнение (13):

$$\left(1-x^2\right)^2 \vartheta(x)+\left[l(l+1)(1-x^2)-(m^2-1)\right]\int\limits_{\alpha}^{\beta} G(x,t)\vartheta(t)dt = F(x), \;\; x\in\left[\alpha,\beta\right], \qquad (20)$$

Непосредственно подставляя (17) в (20) получим:

$$(1-x^2)^2\vartheta(x)+\left[l\,(l+1)(1-x^2)-(m^2-1)\right]\left[\int\limits_{\alpha}^{x}\frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}(x-\beta)\vartheta(t)dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{x}^{\beta}\frac{t-\beta}{\beta-\alpha}(x-\alpha)\vartheta(t)dt\right]=F(x) \qquad (21)$$

Рассмотрим следующие случаи решения уравнения (21):

1-ый случай : Пусть $m=\pm 1,\;\; f(x)\in C\left[\alpha,\beta\right],\; l=0$ или $l=-1$. Тогда из (21) получим следующую формулу:

$$\vartheta(x)=F(x)(1-x^2)^{-2}, \qquad x\in\left[\alpha,\beta\right], \;\; -1<\alpha<\beta<1. \qquad (22)$$

где $F(x)$ определена по формуле (14).

Отсюда (22) подставляем (19) и получаем следующее:

$$u(x)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} G(x,t)F(t)(1-t^2)^{-2}dt\;, \qquad x\in\left[\alpha,\beta\right] \qquad (23)$$

Чтобы найти $Q(x)$, (23) подставим в (9) :

$$Q(x)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} G(x,t)F(t)(1-t^2)^{-2}dt+\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}(b-a)+a \qquad (24)$$

где $F(x)=f(x)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}.$

Для нахождения $P(x)$, (24) подставим в (3):

$$P(x)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\left[\int\limits_{\alpha}^{\beta} G(x,t)F(t)(1-t^2)^{-2}dt+\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}(b-a)+a\right], \;\; x\in\left[\alpha,\beta\right], \qquad (25)$$

2-ой случай : Пусть $m=\pm 1,\; \mathrm{l}\neq 0,\; \mathrm{l}\neq\text{-}1,\; f(x)\in \mathrm{C}\left[\alpha,\beta\right], \qquad -1<\alpha<\beta<1.$ Тогда интегральное уравнение (21) будет линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода

$$\vartheta(x)=-l(l+1)(1-x^2)^{-1}\int\limits_{\alpha}^{\beta} G(x,t)\vartheta(t)dt+F(\mathrm{x})(1-x^2)^{-2}, \qquad (26)$$

где функция $F(x)$ определена по формуле (14)

3-ий случай : Пусть $\mathrm{l}=0$ или $\mathrm{l}=\text{-}1, \quad 1<\alpha<\beta$ или $-1<\alpha<\beta<1$.

Тогда интегральное уравнение (21) сводится к линейному интегральному Фредгольма второго рода.

$$\vartheta(x)=\frac{m^2-1}{(1-x^2)^2}\int_{\alpha}^{\beta}G(x,t)\vartheta(t)dt+\frac{F(x)}{(1-x^2)^2},\qquad x\in[\alpha,\beta] \tag{27}$$

4-ый случай: Пусть $m\neq\pm1,\ l\neq0,\ l\neq-1,\ f(x)\in C[\alpha,\beta],\qquad -1<\alpha<\beta<1$. Тогда интегральное уравнение (21) сводится к линейному интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

$$\vartheta(x)=-\frac{\left[l(l+1)(1-x^2)-(m^2-1)\right]}{(1-x^2)^2}\int_{\alpha}^{\beta}G(x,t)\vartheta(t)dt+\frac{F(x)}{(1-x^2)^2},\qquad x\in[\alpha,\beta]. \tag{28}$$

Замечание 1. Теория линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода изучена во многих работах , в частности , в $[7]$.

Пятый случай: Пусть $m\in R,\ l\neq0,\ l\neq-1,\ f(x)\in C[\alpha,\beta],\ \alpha=-1,\ \beta<1$ или $-1<\alpha<\beta=1$ или $\alpha=-1,\ \beta=1$. Тогда интегральное уравнение (21) является линейным интегральным уравнением Фредгольма третьего рода.

Замечание 2. Теория линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода исследована в работах $[7-10]$.

Заключение

Мы надеемся, что полученный результат поможет многим исследователям, интересующимся исследованием дифференциального уравнения Лежандра в своих работах.

Список использованной литературы:

1. Глушак А.В. Операторная (функция Лежандра/ А.В. Глушак // Изв. РАН. Сер мат. 2001 - Т. 65, № 6. - С. 3 - 14.
2. Д.А.Шапиро.Уравнения в частных производных специальные функции асимптотики.
3. Г.Бейтмен, А.Эрдейи .Высшие трансцендентные функции . Перевод с английского Н.Я. Виленкина. Изд "Мир" Москва 1965. 703 с
4. А. А. Карацуба, “Суммы символов Лежандра от многочленов второй степени с простыми числами”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 42:2 (1978), 315–324; *Math. USSR-Izv.*, **1**2:2 (1978), 299–308 с
5. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики/ А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. М.: Наука, - 1977. - 764 с
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальним уравнениям, Москва,1951.
7. Краснов М.Л, Киселев А.И, Макаренко Г.И. Интегральные уравнения Москва ,1968.
8. Avyt Asanov, Kalyskan Matanova, Ruhidin_Asanov. A class of linear and nonlinear Fredholm Integral Equations of the third kind //Kuwait Journal of //Kuwait Journal of Scıence,2017, Vol.44, No 1, pp.17-28
9. Imanaliev M.I., Asanov A. and Asanov R.A.,” Solutions to Systems of Linear Fredholm Integral Equations of the Third kind with Multipoint Singularities”, *Doklady Mathematics,* 95(3) (2017) 235-239.
10. Галицын А.С., Жуковский А.Н. Интегральное преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. К.: 1986, Наука думка, 284 с.

11. Коллатц Л. Задачи на собственные значения, Москва,1968.
12. Левитов Л.С, Шитов А.В Функции Грина. Задачи и решения. М, ФИЗМАТЛИТ, 2007

Рецензент: к.ф-м.н., доцент Абдылдаева Э.Ф.

УДК: 531.6

Волик Наталья Николаевна, Джаманкулов А. А.
магистрант кафедры физики и технологии ее обучения КГУ им. И.Арабаева
магистрант кафедры физико-математического образования КГУ им. И.Арабаева

АЙЛАНА-ЧӨЙРӨНҮН АГЫМ ПРОЦЕССИНДЕГИ ЭНЕРГИЯ ТҮШҮНҮГҮН ИЗИЛДӨӨ

ИЗУЧЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЭНЕРГИИ НА ПРОТЕКАЮЩИХ ПРОЦЕССАХ В ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЕ

STUDYING THE CONCEPT OF ENERGY IN THE PROCESSING PROCESSES IN THE ENVIRONMENT

Аннотация: Макалада мектептин физика сабагындагы энергия түшүнүгүн изилдөө жөнүндө сөз болот. Мектеп окуучулары арасында дүйнөнүн бир бүтүн физикалык картинасын түзүүнүн бир жолу катары, жаратылыштын негизги мыйзамдарын тереңирээк түшүнүүгө өбөлгө түзөт. Физикалык кубулуштар менен энергия боюнча түшүнүк менен байланышкан чөйрөлөр каралган.

Аннотация: В статье рассматривается изучение понятия энергии в школьном курсе физики. Как одним из способов формирования целостной физической картины мира у старшеклассников, способствующем более глубокому пониманию фундаментальных законов природы. Рассматриваются физические процессы, протекающие в окружающей среде связанные с понятием энергии.

Annotation: The article discusses the study of the concept of energy in the school physics course as one of the ways of forming a holistic physical picture of the world among high school students, which contributes to a deeper understanding by students of the fundamental laws of nature. The physical processes occurring in the environment associated with the concept of energy are considered.

Түйүндүү сөздөр: энергетика, энтропия, термодинамика, ички энергия, жумуш, айлана-чөйрөнү коргоо, кинетикалык энергия.

Ключевые слова: энергия, энтропия, термодинамика, внутренняя энергия, работа, окружающая среда, кинетическая энергия.

Key words: energy, entropy, thermodynamics, internal energy, work, environment, kinetic energy.

В современной педагогике активно развивается тенденция практического применения знаний. В связи с этим наиболее правильным подходом при рассмотрении понятия энергия является изучение его на примерах из окружающей среды. Рассмотрим один из способов представления термина «энергия» для школьников.