ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА

УДК 517.928.2
DOI 10.33514/1694-7851-2024-4-506-510

Белеков К.Ж.
физика-математика илимдеринин кандидаты
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.
kenjebek@mail.ru
Эгембердиев Ш.А.
физика-математика илимдеринин кандидаты
И. Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.
shegemberdiev@list.ru

АБЕЛ ТИБИНДЕГИ КОЗГОЛГОН ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЕЧИМИНИН АСИМПТОТИКАСЫ

Аннотация: Мында Абел тибиндеги сингулярдык козголгон интегро-дифференциалдык теңдеменин классикалык чечими фиктивдик параметр ыкмасы менен тургузулган.

Негизги сөздөр: биринчи түрдөгү абелдин интегралдык теңдемеси, классикалык чечим, козголгон сызыктуу интегро-дифференциалдык теңдемелер, фиктивдик параметр методу.

Белеков К.Ж.
кандидат физико-математических наук
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
г. Бишкек
kenjebek@mail.ru
Эгембердиев Ш.А.
кандидат физико-математических наук
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
г. Бишкек
shegemberdiev@list.ru

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА АБЕЛЯ

Аннотация: здесь методом фиктивного параметра найдено классическое решение сингулярно возбужденного интегро-дифференциального уравнения типа Абеля.

Ключевые слова: абелево интегральное уравнение первого рода, классическое решение, возмущенные линейные интегро-дифференциальные уравнения, метод фиктивного параметра.

Belekov K.Zh.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences
Kyrgyz State University named after I. Arabaev

Bishkek c.
kenjebek@mail.ru
Egemberdiev Sh.A.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Bishkek c.
shegemberdiev@list.ru

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF A PERTURBED INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF ABEL TYPE

Annotation: Here it is constructed the classical solution of the singularly perturbed integral differential equation of the Abel type by the fictitious parameter method.

Keywords: Abel integral equation of the first kind, classical solution, perturbed linear integral-differential equations, Fictitious parameter method.

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}}dt = f(x),\ x\in[0,1] \qquad (1)$$

мында $f(x)\in C^{(1)}[0,1]$ – берилген функция, $\varphi(t)$ – изделүүчү функция, теңдемеси Абелдин теңдемеси деп аталышы бизге белгилүү [2].

Бул теңдемени төмөнкү көрүнүштө жалпыласак да болот:

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha}dt = f(x), \qquad (2)$$

мында $0<\alpha<1$. (2) теңдеме Абелдин жалпыланган теңемеси деп аталат.

Бул теңдеменин $K(x,t)=\dfrac{1}{(x-t)^\alpha}$ ядросу $x=t$ чекитинде “алсыз” өзгөчөлүккө (слабая особенность) ээ.

Абелдин жалпыланган теңемесинин чечимин табуу үчүн (2) теңдеменин эки жагын тең $\dfrac{1}{(x-s)^{1-\alpha}}$ га көбөйтөбүз жана 0 дөн x ке чейин s өзгөрмөсү боюнча интегралдайбыз. Анда төмөнкүнү алабыз:

$$\int_0^x \frac{1}{(x-s)^{1-\alpha}}ds\int_0^s \frac{\varphi(t)}{(s-t)^\alpha}dt = F(x),$$

мында $F(x)\equiv\int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds$.

Акыркы барабардыктын сол жагын өзүнчө карап, интегралдоонун тартибин алмаштырабыз:

$$\int_0^x \frac{1}{(x-s)^{1-\alpha}}ds\int_0^s \frac{\varphi(t)}{(s-t)^\alpha}dt = \int_0^x \varphi(t)dt\int_t^x \frac{1}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^\alpha}ds$$

$s = t + y(x-t)$ ордуна коюсун пайдаланабыз. Анда төмөнкүнү алабыз:

$$\int_0^x \varphi(t)dt \int_0^1 \frac{dy}{(1-y)^{1-\alpha} y^{\alpha}}$$

же

$$\int_0^x \varphi(t)dt \int_0^1 y^{-\alpha}(1-y)^{\alpha-1}dy$$

$$B(1-\alpha;\alpha) = \int_0^1 y^{-\alpha}(1-y)^{\alpha-1}dy$$

$$B(1-\alpha;\alpha) = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}, 0 < \alpha < 1$$

Мына ошентип, $\dfrac{\pi}{\sin \pi\alpha}\int_0^x \varphi(t)dt = F(x)$

Мындан $\int_0^x \varphi(t)dt = \dfrac{\sin \pi\alpha}{\pi} F(x)$ же

$$\varphi(t) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\frac{d}{dx}\big(F(x)\big)$$

$$\varphi(t) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds\right)$$

$$\varphi(t) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\left(\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds\right) \qquad (3)$$

Аныктама. (2) теңдеменин $C[0,1]$ классындагы чечимин классикалык чечим деп атайбыз.

Төмөнкү теорема туура

Теорема 1. Мейли $f(x) \in C^{(1)}[0,1]$ болсун. (2) теңдеме $f(x) \in C^{(0)}[0,1]$ классында классикалык чечимге ээ болуш үчүн

$$f(0) = 0 \qquad (4)$$

шартынын аткарылышы зарыл жана жетиштүү.

Бул теорема (2) теңдеменин чечими (3) түрүндө көрсөтүлгөндүгүнөн келип чыгат, б.а.

$$\varphi(t) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\left(\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds\right) := F(x) \equiv \varphi_0(x) + \varphi_1(x)$$

мында

$$\varphi_0(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}}, \quad \varphi_1(x) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\int_0^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds.$$

$\varphi_1(x)$ функциясы кандайдыр бир m турактуусу менен бир калыпта чектелген, б.а. $|\varphi_1(x)| \le m$ экендиги талашсыз. Бул жерде жана мындан кийин ε параметринен көз каранды болбогон бардык турактууларды m менен белгилейбиз.

(3) дөн эгерде $f(0) \neq 0$ болсо, анда бул чечим $C[0;1]$ көптүгүнө таандык болбошу келип чыгат.

$$f(0) \neq 0 \tag{5}$$

болсун дейли. Бул учурда (3) – чечим классикалык чечим болбойт.

(2) теңдемени кантип “регуляциялаштырууга” жана (3) чечимге жакын классикалык чечимди кантип алууга болот же (2) теңдемеден алынган кандай “сингулярдык козголгон” теңдемени изилдөөгө болот деген суроо жаралат.

Мисалы үчүн,

$$\int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha}\left[\varphi(t) + \varepsilon A(t,\varphi(t))\right]dt = 0$$

мында $A(t,\varphi(t))$ – кандайдыр бир сызыктуу же сызытуу эмес дифференциалдык (кадимки же жекече туундулуу) оператор.

Фредгольм тибиндеги теңдемелерди изилдөөдө мындай теңдемелердин жакындаштырылган чечимдерин алуу үчүн алар экинчи түрдөгү теңдемелерге келтирилери белгилүү [1].

(2) теңдемени жана анын сызыктуу регуляризацияланган

$$\int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha}\left[y(t) + \varepsilon\frac{dy}{dt}\right]dt = f(x), \tag{6}$$

мында $f(0) \neq 0$, $y(t)$ – белгисиз функция, теңдемесин карайбыз. (6) теңдемеге

$$y(0) = 0 \tag{7}$$

баштапкы шартын коёбуз.

(6)-(7) маселе төмөнкү маселеге тең күчтө [3]:

$$\varepsilon\frac{dy}{dx} = -y(x) + F(x), \quad y(0) = 0, \tag{8}$$

(8) ге туура келген “козголбогон” теңдеменин $y_0(x) = \varphi_0(x)$ чечими $y_0(0) = \varphi_0(0) = \infty$ болгондуктан $y(0) = 0$ шартын канааттандырбайт. Бизге төмөнкү теорема керек.

Теорема 2. (7) маселе

$$\Phi(x,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x e^{-\frac{x-s}{\varepsilon}} F(s)ds$$

клаасикалык чечимине ээ жана ал үчүн

$$|\Phi(x,\varepsilon)| \le m\varepsilon^{\beta-1}$$

мында $0 < \gamma = 2(1-\beta)$, $0 < \beta < \alpha$, баалоосу аткарылат [4].

Далилдөө.

$$\Phi(x,\varepsilon) = I(x,\varepsilon) + J(x,\varepsilon),$$

мында

$$I(x,\varepsilon)=\omega\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x e^{-\frac{x-s}{\varepsilon}}s^{\alpha-1}ds\,,\quad J(x,\varepsilon)=\omega\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x e^{-\frac{x-s}{\varepsilon}}\varphi_1(s)ds$$

экендигине ээ болобуз.

$J(x,\varepsilon)$ функциясы кандайдыр бир турактуу менен чектлери талашсыз. $I(x,\varepsilon)$ функциясы үчүн баалоону алуу үчүн $x-s=t$ ордуна коюсун пайдалангандан кийин аны төмөндөгүчө жазып алабыз

$$I(x,\varepsilon)=\omega\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x e^{-\frac{t}{\varepsilon}}(x-t)^{\alpha-1}dt$$

жана бул интегралды эки кошулуучуга бөлөбүз

$$I(x,\varepsilon)=I_1(x,\varepsilon)+I_2(x,\varepsilon)$$

мында

$$I_1(x,\varepsilon)=\omega\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\delta e^{-\frac{t}{\varepsilon}}(x-t)^{\alpha-1}dt\,,$$

$$I_2(x,\varepsilon)=\omega\frac{1}{\varepsilon}\int_\delta^x e^{-\frac{t}{\varepsilon}}(x-t)^{\alpha-1}dt\,,\ \delta>0$$

Бул туюнтмалардан

$$\left|I_1(x,\varepsilon)\right|\le m\frac{1}{\varepsilon}\delta^{\alpha}\,,\ \left|I_2(x,\varepsilon)\right|\le m$$

баалоолорун алабыз. Эгерде δ параметрин $\delta^{\alpha}=\varepsilon^{\beta}$ боло тургандай кылып тандап алсак, анда

$$\left|I_1(x,\varepsilon)\right|\le m\varepsilon^{\beta-1}$$

болот.

Теорема далилденди.

Корутунду

Бул жерде биринчи түрдөгү Абел теңдемесинин классикалык эмес чечими Абел тибиндеги сингулярдуу бузулган сызыктуу теңдеме менен жакындашып, натыйжада бул теңдемелердин классикалык болжолдуу чечимин алабыз.

Колдонулган адабияттар

1. Tricomi F. G. Integral equations. – New York, Dover pub., 1985.-256 p.
2. Краснов М.Л. Интегральные уравнения.- М., Наука, 1975. – 303 с.
3. Alymkulov K., Belekov K.J. Asymptotic of the solution of the singulary perturbed of the integro-differential equation of the Abel type (тезис), International Conference, MADEA-8, June 17-23, 2018, Issyk-Kul, Kyrgyz Republic, С.27
4. Белеков К.Ж., Эгембердиев Ш.А. Решение дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами операционным методом //Вестник КГУ им. И. Арабаева, №1, 2023 г., – С.67-71.