УДК 51: 378.147
DOI 10.33514/1694-7851-2024-4/2-181-188

Асанова Ж.К.
физика-математика илимдеринин кандидаты, профессордун м.а.
И.Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.
zhyldyzasanova73@mail.ru
Акчалова Н.Б.
магистрант
И.Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.
Кочконова А.С.
магистрант
И.Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.

ИНТЕГРАЛ ТҮШҮНҮГҮН ОКУТУУДА ФИЗИКАЛЫК МОДЕЛДЕРДИ КОЛДОНУУ

Аннотация: Бул иште интеграл түшүнүгүн окутууда физикалык моделдерди колдонуу каралат, бул студенттерге математикалык концепцияларды тереңирээк түшүнүүгө жардам берет. Физикалык моделдер интегралдоо теориялык аспекттерин көрсөтүп берүүгө жардам берип, студенттерге математика менен физиканын ортосундагы байланышты көрүүгө мүмкүндүк берет.

Жумуш, суюктуктун басымы жана ылдамдыкты эсептөө сыяктуу мисалдарды колдонуу менен, интегралды интегралдык сумманын предели катары көрсөтүү мүмкүнчүлүгү берилет, бул анын чыныгы физикалык кырдаалдардагы маанисин түшүнүүнү жеңилдетет.

Физикалык моделдерге негизделген методикалар интегралды толук түшүнүүгө көмөктөшүп, студенттерде сынчыл ойлонуу жана аналитикалык көндүмдөрдү өнүктүрүүгө жардам берет. Изилдөөнүн жүрүшүндө конкреттүү моделдердин мисалдары гана эмес, окутуунун ар кандай этаптарында колдонуу боюнча методикалык сунуштар да берилген. Маселелерди акырындык менен татаалдаштырууга жана предметке болгон кызыктырууга өзгөчө көңүл бөлүнгөн.

Бул иш физика менен математиканы окуу процессине интеграциялоонун маанилүүлүгүн белгилеп, бул ыкмаларды билим берүү программаларына киргизүү боюнча сунуштарды берет. Бул, өз кезегинде, материалды өздөштүрүүнүн деңгээлин жогорулатып, студенттердин STEM (илим, технология, инженерия жана математика) предметтерине болгон кызыгуусун арттырып, математикадагы практикалык көндүмдөрүн башка илимдерде колдонууга жардам берет.

Негизги сөздөр: интеграл, ылдамдык, жумуш, узундук, убакыт, инерция, аянт, масса, математикалык моделдөө, модель, кинетикалык энергия.

Асанова Ж.К.
кандидат физико-математических наук, и.о. профессора
Кыргызский государственный университет имени И.Арабаева
г. Бишкек
zhyldyzasanova73@mail.ru

Акчалова Н.Б.
магистрант
Кыргызский государственный университет имени И.Арабаева
г. Бишкек
Кочконова А.С.
магистрант
Кыргызский государственный университет имени И.Арабаева
г. Бишкек

ПРИМЕНЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРИ ОБУЧЕНИИ ПОНЯТИЮ ИНТЕГРАЛА

Аннотация: В данной работе рассматривается применение физических моделей в процессе обучения понятию интеграла, что способствует более глубокому пониманию математических концепций у студентов. Физические модели служат наглядным средством для иллюстрации теоретических аспектов интегрирования, позволяя учащимся видеть взаимосвязь между математикой и физикой.

Используя примеры, такие как вычисление работы, давления жидкости и скорости, мы показываем, как интеграл может быть представлен как предел интегральной суммы, что облегчает понимание его значения в реальных физических ситуациях. Методики, основанные на физических моделях, способствуют формированию целостного восприятия интеграла, а также помогают развить у студентов критическое мышление и аналитические навыки. В ходе исследования предложены примеры конкретных моделей. Особое внимание уделено вопросам постепенного усложнения задач и поддержания интереса к предмету.

Работа подчеркивает важность интеграции физики и математики в учебном процессе и предлагает рекомендации для внедрения этих подходов в образовательные программы, что, в свою очередь, может повысить уровень усвоения материала, интерес студентов к предметам STEM (наука, технологии, инженерия и математика) и развить у них практические навыки применения математики в других науках.

Ключевые слова: интеграл, скорость, работа, длина, время, инерция, площадь, масса, математическое моделирование, модель, кинетическая энергия.

Asanova Zh.K.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Acting professors
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Bishkek c.
zhyldyzasanova73@mail.ru
Akchalova N.B.
Master’s Student
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Bishkek c.
Kochkonova A.S.
Master’s Student
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Bishkek c.

APPLICATION OF PHYSICAL MODELS IN TEACHING THE CONCEPT OF INTEGRAL

Abstract: This paper explores the application of physical models in teaching the concept of integration, which fosters a deeper understanding of mathematical concepts among students. Physical models serve as visual tools for illustrating theoretical aspects of integration, allowing students to see the connection between mathematics and physics.

Using examples such as calculating work, fluid pressure, and velocity, we demonstrate how the integral can be represented as the limit of an integral sum, which facilitates understanding its significance in real physical situations. Methodologies based on physical models contribute to forming a holistic perception of the integral and help develop critical thinking and analytical skills in students. The study presents examples of specific models. Special attention is given to the gradual complexity of tasks and maintaining student interest in the subject.

The paper emphasizes the importance of integrating physics and mathematics in the educational process and provides recommendations for incorporating these approaches into educational programs. This, in turn, can enhance material comprehension, increase students' interest in STEM subjects (Science, Technology, Engineering, and Mathematics), and develop practical skills for applying mathematics in other fields.

Keywords: Integral, velocity, work, length, time, inertia, area, mass, mathematical modeling, model, kinetic energy.

Понятие интеграла играет ключевую роль в математике и является завершающим этапом школьного курса. Введение этой темы открывает для учеников новые способы познания мира и демонстрирует применение интегрального исчисления в наиболее важных разделах физики, подчёркивая значимость и силу высшей математики.

Основной задачей данной статьи является исследование различных подходов к введению интеграла, его свойств и областей применения. Также разрабатывается методика изучения интегралов с опорой на физико-математические модели и проводится анализ эффективности предложенного метода.

Модель это структурированный подход, включающий использование физических понятий и ситуаций для иллюстрации математического понятия интеграла, что помогает студентам легче воспринимать и понимать сложные теоретические аспекты [3, 36с.].

Физическая модель — это конкретное физическое явление или ситуация, которую можно описать с помощью интегралов. Она служит наглядным примером для объяснения того, как интегралы используются для решения задач в физике и других науках [3, 48с.].

Модель как понятие охватывает множество способов описания изучаемой реальности. Её можно рассматривать как объект, который воплощает абстрактную идею или служит интерпретацией определённой теории. В школьном курсе математики, особенно в теме «Интеграл», наиболее актуальными являются модели, основанные на физике.

Физические величины, которые можно вычислить с помощью интеграла, делятся на два типа в зависимости от их природной интерпретации.

Первый тип включает «основные» величины, такие как длина пути, масса, количество электричества, тепло и т.п. Эти величины служат базой для определения других, «вторичных» величин, таких как скорость, плотность, сила тока, удельная теплоёмкость и т.д.

Второй тип охватывает величины, которые сами определяются как интегралы от «основных» величин, например, площадь или работа.

Таким образом, стоит рассмотреть различные физические модели из таких разделов науки, как механика, электродинамика, кинематика и другие. Особое внимание будет уделено второму типу величин, так как в школьных учебниках они часто недостаточно рассматриваются.

Для вычисления работы физической системы, например, перемещения объекта под действием переменной силы, можно использовать физическую модель, где работа будет представлена интегралом силы по пути. Эта модель помогает студентам понять, что интеграл — это сумма бесконечно малых величин, что является важным понятием в математике, но имеет прямую физическую интерпретацию.

Введение понятия интеграла как предела интегральной суммы наглядно и доступно объясняет студентам задачи, связанные, например, с давлением жидкости на стенку.

Использование свойств интеграла.

Задача 1. На тело массой m=2 кг действует сила, изменяющаяся по закону $F(x) = 3x^2$ (в ньютонах), где x — перемещение в метрах. Найдите работу, совершаемую силой при перемещении тела от $x_1 = 0$ до $x_2 = 3$м $[3, 21с.]$.

Решение:

Работа A может быть определена как:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$$

Подставляем выражение для силы:

$$A = 3\int_0^3 x^2dx = 3\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = 27\text{Дж.}$$

Работа, совершенная силой, составляет 27 Дж.

Задача 3. Тело бросается с поверхности земной поверхности вертикально, при начальной скорости v_0. Какая высота тела достигается наибольшей высотой? [1, 45с.]

Решение. 1. **Используем уравнение движения:**

Уравнение для высоты h в зависимости от времени t выглядит следующим образом:

$h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$

2. Нахождение времени, когда скорость равна нулю:

Максимальная высота достигается, когда скорость тела становится равной нулю. Скорость V(t) может быть найдена из уравнения:

V(t)=v_0- gt.

Устанавливаем скорость равной нулю для нахождения времени подъема:

0=v_0- gt; $t = \frac{v_0}{g}$.

3.Подставляем найденное время в уравнение высоты:

Теперь подставим это значение времени в уравнение для высоты:

$$h = \int_0^{\frac{v_0}{g}} (v_0 - gt)dt = \left.\left(v_0t - \frac{gt^2}{2}\right)\right|_0^{\frac{v_0}{g}} = \frac{{v_0}^2}{2g}.$$

Максимальная высота, достигаемая телом, равна:

$$h_{max}=\frac{{v_0}^2}{2g}$$

Введение новой переменной.

Задача 4. Задан закон о изменении скорости движение материальных точки в прямом направлении: $v=(2t+1)^{\frac{2}{3}}$ (время t в секундах, скорость v в метрах в секунду). Какой путь пройдёт точка за 13 с от начала движения (t=0)? [5, 69с.]

Решения:

1. Дано уравнение скорости: $v=(2t+1)^{\frac{2}{3}}$
2. Нахождение пути:

   Путь S, пройденный точкой, можно найти путем интегрирования скорости по времени:

$$S=\int_0^t v(t)dt=\int_0^{13}(2t+1)^{\frac{2}{3}}dt.$$

3. Введение новой переменной:

   Для удобства интегрирования, введем новую переменную:

   u=2t+1 ⇒ du=2dt ⇒ $dt=\frac{du.}{2}$

   При t=0 получаем u=1, а при t=13 получаем:

   u=2·13+1=27.

   Теперь можем переписать интеграл:

$$S=\int_1^{27}u^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}\int_1^{27}u^{\frac{2}{3}}\cdot du.$$

4. Вычисление интеграла:

   Интегрируем:

$$\int u^{\frac{2}{3}}du=\frac{u^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}=\frac{3}{5}u^{\frac{5}{3}}.$$

Материальная точка пройдет путь S=72.6 метра за 13 секунд.

Задача 5. Вычислите количество электроэнергии, протекающего по цепи за промежуток времени [0,01; 1], когда ток изменяется в соответствии с формулой [4, 198с.]

$I(t)=0{,}5\,cos\left(100\pi t+\frac{\pi}{6}\right).$

Решение. Количество электричества за определенный срок протекает

dq=I(t)dt.

В качестве нового переменного вводим величину

$$u=100\pi t+\frac{\pi}{6}.$$

$$dt=\frac{1}{100\pi}du.$$

Таким образом, общее количество электричества равно

$$q=\int 0{,}5\cos\left(100\pi t+\frac{\pi}{6}\right)dt=\int 0{,}5\frac{1}{100\pi}\cos u\,du=0{,}5\frac{1}{100\pi}\sin u=0{,}5\frac{1}{100\pi}\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$q = \int_{0,01}^{1} 0{,}5\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right)dt = 0{,}5\frac{1}{100\pi}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\Bigg|_{0,01}^{1} = \frac{1}{200\pi}.$$

Интегрирование путем подстановки.

Задача 6. Найти значение давления полукруга, вертикально погруженного в жидкости, если радиус его равен R, а диаметр верхнего диаметра находится на свободном рисунке жидкости; удельного весу жидкости γ [3, 32с.].

Решение. Проводим горизонтальную полосу на глубину x. Давление жидкости в этой полосе равна

$$dP = 2\gamma x\sqrt{R^2 - x^2}dx.$$

Так, как

$$P = \gamma\int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}dx.$$

$$P = \gamma\int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}dx = -\gamma\int_0^R (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}d(R^2 - x^2) = -\gamma\frac{2}{3}(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^R = \frac{2}{3}\gamma R^3.$$

Предлагаем несколько нетривиальных примеров использования интеграла в физике.

Задача 8. Вычисляется кинетическая энергия диска массой M и радиуса R, который вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, которая проходит через центр, перпендикулярный к его поверхности [6, 67с.].

Решение. Рассмотрим массу кругового кольца толщиной dr, находящегося на расстоянии r от центра диска. Масса этого кольца вычисляется по формуле 2πρrdr, где $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$ - поверхностная плотность диска. Линейная скорость υ=ωr кольца. Таким образом, кинетическая энергия кольца определяется следующим образом:

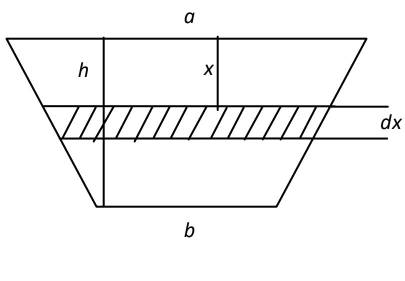
$$dK = \frac{v^2}{2}dm = \pi\rho\omega^2 r^3 dr = \frac{M}{R^2}\omega^2 r^3 dr.$$

$$K = \frac{M}{R^2}\omega^2\int_0^R r^3 dr = \frac{MR^2\omega^2}{4}.$$

Нахождение давления.

Задача 10. Определить давление на плотину, если уровень воды достигает ее верхней части. Плотина имеет форму трапеции с высотой h, верхней основой *a* и нижней основой b [2, 54с.].

Решение: Рассмотрим слой воды на глубине x от верхней части плотины. Длина этого слоя равна:



l=$a - \frac{a-b}{h}x$

Следовательно, площадь этого слоя воды dS будет равна:

$$dS = \left(a - \frac{a-b}{h}x\right)dx,$$

Давление dP на этот слой определяется как:

dP=$\boldsymbol{\rho g h}$,

где ρ — плотность воды, g — ускорение свободного падения, а h — глубина, на которой находится данный слой.

Общее давление на плотину выражается интегралом:

$$P = \int_0^h \left(a - \frac{a-b}{h}x\right) x dx = a\int_0^h x dx - \frac{a-b}{h}\int_0^h x^2 dx = a\frac{x^2}{2}\Big|_0^h - \frac{a-b}{h}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{h^2}{6}(a+2b).$$

Таким образом, общее давление на плотину составляет:

$$P = \frac{h^2}{6}(a+2b)$$

Нахождение работы.

Задача 11. На тело массой m=3 кг действует сила, которая изменяется по закону F(x)=4x (в ньютонах), где x — перемещение в метрах. Найдите работу, совершаемую силой при перемещении тела от $x_1 = 1$м до $x_2 = 3$м [4,44с.].

Работа A, совершаемая силой, вычисляется по формуле:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

Подставляем данное выражение для силы:

$$A = \int_1^3 4x dx$$

Теперь вычислим интеграл:

$$A = 4\int_1^3 x dx = 4\frac{x^2}{2}\Big|_1^3 = 16\text{Дж}.$$

Работа, совершенная силой, составляет 16 Дж.

Применение физических моделей при обучении понятию интеграла является эффективным инструментом для углубленного понимания математических концепций. Физические модели помогают визуализировать абстрактные идеи интегрирования, связывая их с реальными физическими явлениями. Это не только облегчает восприятие и освоение материала, но и способствует формированию более глубокого осознания значимости интеграла в различных областях науки и техники.

Использование наглядных примеров, таких как работа, давление жидкости и движение, позволяет студентам не только усваивать математические методы, но и понимать их практическое применение. Такие подходы развивают критическое мышление и навыки решения задач, что особенно важно в современном образовательном контексте.

Таким образом, интеграция физических моделей в процесс обучения математике, в частности, в изучение интегралов, представляет собой перспективное направление, которое может значительно повысить качество образовательного процесса. Будущие исследования и внедрение данных методов в учебные программы будут способствовать подготовке студентов к успешной профессиональной деятельности в области науки, технологий, инженерии и математики.

Литература:

1. Баранов, В. Н. Интегралы и их приложения в физике / В. Н. Баранов. – СПб. БХВ-Петербург, 2016. – 256 с.
2. Андреева, И. Ю. Физические модели в обучении математике: интегралы и их приложения / И. Ю. Андреева. – Екатеринбург: УрФУ, 2018. – 180 с.
3. Иванова, М. В. Методы интегрирования в физике: учебное пособие / М. В. Иванова. – Казань: Казанский университет, 2017. – 295 с.

4. Крылов, Н. С. Физика и математический анализ: от моделей к интегралам / Н. С. Крылов. – Новосибирск: Наука, 2019. – 224 с.
5. Лебедев, А. А. Применение математического анализа в физике: от дифференциальных уравнений до интегралов / А. А. Лебедев. – М.: Физматлит, 2020. – 320 с.
6. Козлов, Ю. В. Физические модели и интегралы: теория и практика / Ю. В. Козлов. – М.: ЛКИ, 2014. – 240 с.

Рецензент: доктор педагогических наук Торогельдиева К.М.