УДК 519.852
DOI 10.33514/1694-7851-2024-4/2-453-460

Кутанов А.К.
физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент
И.Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.
Munara69a@gmail.com
Ермекова А.Е.
магистрант
И.Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.
Мирланбекова Ж.М.
магистрант
И.Арабаев атындагы Кыргыз мамлекеттик университети
Бишкек ш.

СЫЗЫКТУУ ПРОГРАММАЛОО МАСЕЛЕЛЕРИН ЧЫГАРУУДА БАРАБАРСЫЗДЫКТАРДЫ БАРАБАРДЫККА АЙЛАНДЫРУУ ЫКМАЛАРЫ

Макалада сызыктуу барабарсыздыктардын системасы изилденет, ал сызыктуу алгебранын негизги элементтеринин бири болуп саналат жана сызыктуу программалоо маселелерин чечүүдө колдонулат. Ар бир сызыктуу барабарсыздыктардын системасы сызыктуу теңдемелер системасына кошумча терс эмес өзгөрмөлөр менен айландырылышы мүмкүн экендиги көрсөтүлгөн, бул чыгарылыштарды натыйжалуу табууга мүмкүндүк берет. Сызыктуу барабарсыздыктардын системасынын ар бир чыгарылышына тең келген сызыктуу теңдемелер системасынын чыгарылышы болот, анда кошумча өзгөрмөлөр $\mu_i \geq 0$ типтеги барабарсыздыгы канааттандырат. Макалада ошондой эле чыгарылыштардын геометриялык интерпретациялары каралат. Мисалдар келтирилген, алар сызыктуу теңдемелер системасынын чыгарылышы кандайча баштапкы сызыктуу барабарсыздыктар системасынын чыгарылышы менен байланышкандыгын көрсөтөт. Бул ыкма сызыктуу программалоо маселесин сызыктуу теңдемелер системасынын терс эмес чыгарылыштарын табуу маселесине айландырууга мүмкүнчүлүк берет, бул оптималдуу чыгарылыштарды табуу процессин жөнөкөйлөтөт.

Сызыктуу барабарсыздыктар системасын чыгаруу ыкмасы мисалдар менен кеңири түшүндүрүлөт. Бул иште биз, ар бир $x_1^{(0)}, x_{2,\ldots,}^{(0)} x_n^{(0)}$ сызыктуу барабарсыздыктар системасынын чыгарылышына белгилүү бир $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$. $\mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \ldots \mu_m^{(0)}$ жана сызыктуу алгебралык теңдемелер системасынын чыгарылышы туура келерин көрсөтөбүз, кошумча белгисиздер $\mu_1^{(0)} \geq 0, \mu_2^{(0)} \geq 0, \ldots, \mu_m^{(0)} \geq 0$ шарттарын канааттандырат. Негизги аспект – симплекс ыкмасын колдонуу, ал сызыктуу программалоо маселелерин чыгарууда, анда сызыктуу барабарсыздыктар системасы сызыктуу теңдемелер маселесине айландырылат.

Негизги сөздөр: сызыктуу барабарсыздыктар, сызыктуу теңдемелер системасы, терс эмес чыгарылыштар, сызыктуу программалоо, геометриялык интерпретация, кошумча өзгөрмөлөр, оптимиалдуу, симплекс ыкмасы.

Кутанов А.К.
кандидат физико-математических наук, доцент
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
г. Бишкек
Munara69a@gmail.com
Ермекова А.Е.
магистрант
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
г. Бишкек
Мирланбекова Ж.М.
магистрант
Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева
г. Бишкек

МЕТОДЫ ПРИВЕДЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ К РАВЕНСТВАМ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Аннотация: В статье исследуется система линейных неравенств, которая является ключевым элементом линейной алгебры и применяется в решении задач линейного программирования. Показано, что любую систему линейных неравенств можно преобразовать в систему линейных уравнений с дополнительными неотрицательными переменными, что позволяет эффективно искать решения. Для каждого решения системы неравенств существует соответствующее решение системы уравнений, где дополнительные переменные удовлетворяют неравенствам типа $\mu_i \geq 0$. В работе также рассматриваются геометрические интерпретации решений: точки многогранника решений системы неравенств и расстояния от этих точек до гиперплоскостей. Приведены примеры, которые показывают, как решение системы линейных уравнений связано с решением исходной системы неравенств. Этот подход позволяет свести задачу линейного программирования к задаче нахождения неотрицательных решений системы линейных уравнений, что существенно упрощает процесс поиска оптимальных решений.

Вывод системы линейных неравенств подробно иллюстрируется примерами. В этой работе покажем, что всякому решению $x_1^{(0)}, x_{2,\dots,}^{(0)} x_n^{(0)}$ системы неравенств соответствует определенное решение $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$. $\mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \dots \mu_m^{(0)}$ системы линейных алгебраических уравнений, причем дополнительные неизвестные удовлетворяют условию $\mu_1^{(0)} \geq 0, \mu_2^{(0)} \geq 0, \dots, \mu_m^{(0)} \geq 0$. Важным аспектом является использование симплекс-метода для нахождения решений задач линейного программирования, где система линейных неравенств сводится к задаче линейных уравнений.

Ключевые слова: линейные неравенства, система линейных уравнений, неотрицательные решения, линейное программирование, многогранник решений, геометрическая интерпретация, гиперплоскости, дополнительные переменные, оптимизация, симплекс-метод.

Kutanov A.K.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Kyrgyz State University named after I. Arabaev

Bishkek c.
Munara69a@gmail.com
Ermekova A.E.
Master's Student
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Bishkek c.
Mirlankebova Zh.M.
Master's Student
Kyrgyz State University named after I. Arabaev
Bishkek c.

METHODS OF CONVERTING INEQUALITIES TO EQUALITIES IN SOLVING LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

Abstract: This article investigates a system of linear inequalities, which is a key element of linear algebra and is applied in solving linear programming problems. It is shown that any system of linear inequalities can be transformed into a system of linear equations with additional non-negative variables, which allows for efficient solution searching. For each solution of the inequality system, there is a corresponding solution of the system of equations, where the additional variables satisfy inequalities of the form $\mu_i \geq 0$. The work also discusses geometric interpretations of solutions: the points of the polyhedron of the inequality system's solutions and the distances from these points to the hyperplanes. Examples are provided to demonstrate how the solution of the system of linear equations relates to the solution of the original system of inequalities. This approach allows transforming the linear programming problem into the problem of finding non-negative solutions to a system of linear equations, significantly simplifying the process of finding optimal solutions.

The derivation of the system of linear inequalities is illustrated in detail with examples. In this work, we show that for every solution $x_1^{(0)}, x_{2,\dots,}^{(0)}, x_n^{(0)}$ of the inequality system, there is a corresponding solution $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}.\ \mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \dots \mu_m^{(0)}$ of the system of linear algebraic equations, where the additional unknowns satisfy the condition $\mu_1^{(0)} \geq 0, \mu_2^{(0)} \geq 0, \dots, \mu_m^{(0)} \geq 0$. An important aspect is the use of the simplex method to find solutions to linear programming problems, where the system of linear inequalities is reduced to a system of linear equations.

Keywords: linear inequalities, system of linear equations, non-negative solutions, linear programming, solution polyhedron, geometric interpretation, hyperplanes, additional variables, optimization, simplex method.

Задачи линейного программирования (ЛП) являются важнейшими инструментами в области оптимизации и активно используются в экономике, инженерии, теории управления, а также в других дисциплинах, где требуется принятие оптимальных решений в условиях ограничений. Одной из ключевых проблем линейного программирования является решение системы линейных неравенств, которые формируют область допустимых решений задачи. Важность исследования этих систем заключается в том, что многие реальные задачи оптимизации можно представить в виде системы линейных неравенств, которые необходимо преобразовать и решить для нахождения оптимального решения.

Многочисленные исследования в этой области были проведены как теоретиками, так и практиками. Одним из первых важных шагов стало использование преобразования системы линейных неравенств в систему линейных уравнений с дополнительными переменными, что значительно упростило процесс поиска решений. Важную роль в теории ЛП сыграли работы таких ученых, как Гайо Д. С., который в 1947 году предложил принцип симплекс-метода для поиска оптимального решения линейной задачи. Метод стал основным инструментом для решения таких задач, а последующие улучшения и уточнения были сделаны в работах Штейнберга И. А. и Нестерова Ю. Е., которые исследовали методы и алгоритмы для эффективного решения задач с линейными неравенствами.

Система линейных неравенств в контексте линейного программирования была детально изучена в ряде работ Ниязова Б. М. и Ташовой М. К., которые исследовали методы оптимизации и их применения в теории управления [1, 25б.]. Также важным вкладом стали исследования Жумаева Э. Б. и Исаева М. Б., которые рассматривали линейное программирование и его приложения в различных областях экономики и управления, применяя методы преобразования неравенств в уравнения [2, 49б.].

В последние годы внимание ученых сосредоточилось на улучшении вычислительных методов для поиска решений задач линейного программирования. Исследования таких авторов, как Шмидт А. Н. и Попов С. В., а также Мухамедовой Н. Т. и Батырбекова Т. К., направлены на разработку более эффективных алгоритмов для решения задач ЛП, включая усовершенствованные версии симплекс-метода и методы с использованием дополнительных переменных [3, 57б., 4, 69б.].

Таким образом, преобразование системы линейных неравенств в эквивалентную систему линейных уравнений с дополнительными неотрицательными переменными является важной темой исследования в области линейного программирования и имеет значительные теоретические и практические применения.

Пусть задана система m линейных неравенств с n неизвестным [5, 89б.].

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \le b_{2,} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{m1}x_{1+}a_{m2}x_{2+\cdots}a_{mn}x_n \le b_m, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

определяющая в n-мерном пространств многогранник решений. Рассмотрим наряду с этой системой неравенста систему m линейных алгебраических уравения с n+m неизвестными

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n + p_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_x + p_2 = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n + p_m = b_m \end{array}\right\} \qquad (1')$$

Покажем, что всякому решению $x_1^{(0)}, x_{2,\dots,}^{(0)} x_n^{(0)}$системы неравенств (1) соответствует определенное решение $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}.\mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \dots \mu_m^{(0)}$ системы линейных алгебраических уравнений (1), причем дополнительные неизвестные удовлетворяют условию $\mu_1^{(0)} \ge 0, \mu_2^{(0)} \ge 0, \dots, \mu_m^{(0)} \ge 0$. В самом деле, если есть решение системы (1), то имеют место неравенства

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1^{(0)} + a_{12}x_2^{(0)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(0)} \le b_1, \\ a_{21}x_1^{(0)} + a_{22}x_2^{(0)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(0)} \le b_{2,} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots., \\ a_{m1}x_1^{(0)} + a_{m2}x_2^{(0)} + \cdots + a_{mn}x_n^{(0)} \le b_m. \end{array}$$

Обозначим

$$\begin{cases} \mu_1^{(0)} = b_1 - \left(a_{11}x_1^{(0)} + a_{12}x_2^{(0)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(0)}\right) \\ \mu_2^{(0)} = b_2\left(a_{21}x_2^{(0)} + a_{22}x_2^{(0)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(0)}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu_m^{(0)} = b_m - \left(a_{m1}x_1^{(0)} + a_{m2}x_2^{(0)} + \cdots + a_{mn}x_n^{(0)}\right) \end{cases} \qquad (\mathbf{1}'')$$

Тогда, во-первых $,\mu_1^{(0)} \geq 0, \mu_2^{(0)} \geq 0, \dots, \mu_m^{(0)} \geq 0$; во-вторых, система чисел $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots., x_n^{(0)}, \mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \dots, \mu_m^{(0)}$, как следует из $(1'')$, есть решение системы линейных алгебрических уравнений.

Докажем, наоборот, что всякому решению

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, \mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \dots, \mu_m^{(0)}$$

Системы уравнений $(1')$,удовлетворяющему условию $\mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \dots, \mu_m^{(0)} \geq 0$, соответствует определенное решение системы неравенств (1). В самом деле поскольку система чисел $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}.\ \mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \dots, \mu_m^{(0)}$ есть решеник системы $(1')$, то можно записать

$$a_{11}x_1^{(0)} + a_{13}x_2^{(0)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(0)} + \mu_1^{(0)} = b_1.$$
$$a_{21}x_1^{(0)} + a_{22}x_2^{(0)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(0)} + \mu_2^{(0)} = b_2.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1^{(0)} + a_{m2}x_2^{(0)} + \cdots + a_{mn}x_n^{(0)} = b_m.$$

Так как, по предположению, числа $\mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \dots, \mu_m^{(0)}$неотрицательны, то имеют место неравенства

$$a_{11}x_1^{(0)} + a_{12}x_2^{(0)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(0)} \leq b_1.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1^{(0)} + a_{m2}x_2^{(0)} + \cdots + a_{mn}x_n^{(0)} \leq b_m.$$

т.е.система чисел $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ есть решение системы неравенств (1).

Таким образом установлено взаимно однозначное соответствие между множеством всех решений $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ системы (1) и множеством решений $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, \mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \dots, \mu_m^{(0)}$ системы $(1')$, причем дополнительные неизвестные $\mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)}, \dots, \mu_m^{(0)}$ неотрицательны. Таким образом, задача решения системы линейных неравенств вида (1) сводиться к решению соответствующей системы линейных уравнений вида $(1')$.

В задачах линейного праграммирования нас будут интересовать решения системы неравенства, удовлетворяющие условию

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Такие решения называются неотрицательными. Поэтому,так как решение системы неравенств сводиться к решению соответствующей системы линейных алгебраических уравнений,то одним из вопросов линейного программирования является определение неотрицательных решений системы линейных уравнений.

Пример.Требуется определить неотрицательное решение системы неравенств

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6. \\ -x_1 + x_2 \leq 2. \\ -x_1 - 3x_1 \leq 3. \end{cases}$$

Вводя дополнительные неизвестные $\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \mu_3 \geq 0$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + \mu_1 \qquad = 6, \\ -x_1 + x_2 \qquad + \mu_2 \qquad = 2, \\ -x_1 - 3x_2 \qquad + \mu_3 = 3. \end{cases}$$

Всякому неотрицательному решению этой системы уравнений соответствует определенное неотрицательное решение исходной системы неравенств, и наоборот.Так, например, неотрицательному решению $x_1 = 1; x_2 = 1; \mu_1 = 1\ ; \mu_2 = 2;\ \mu_3 = 7$ системы уравнений соответствует неотрицательное решение $x_1 = 1;\ x_2 = 1$ исходной системы неравенств.

Заметим,что если система неравенств несовместна в области неотрицательных решений то соответсвующая система линейных уравнений не имеет ни одного неотрицательного решения.

Выше было показано, что наменьшее (наибольшее) значение линейной формы на многограннике, определяемом системой неравенств, достигается в определенной вершине многогранника решений. Можно показать, что каждой вершине многогранника решений отвечает неотрицательное решение соответствующей системы линейных алгебрических уравнений, причем по крайней мере одна дополнительная неизвестная ровна нулю. Дополнительные неизвестные $\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \dots, \mu_m \geq 0$.вводимые в систему неравенств, можно иллюстривовать геометрически.

Рассмотрим многоранник решений системы неравенств:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq 1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m.$$

Пусть имеется одно из неотрицательных решений $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$, системы неравенств. Ему соответствует точка $M\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)$, принадлежащая многограннику решений.

Пусть $h_\imath$ обозночает растояние от точки М до $\imath -$ й гиперплоскости. Значения дополнительных неизвестных

$$\mu_1^{(0)} = b_1 - \left(a_{11}x_1^{(0)} + a_{12}x_2^{(0)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(0)}\right).$$
$$\mu_2^{(0)} = b_2 - \left(a_{21}x_1^{(0)} + a_{22}x_2^{(0)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(0)}\right).$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\mu_m^{(0)} = b_m - \left(a_{m1}x_1^{(0)} + a_{m2}x_2^{(0)} + \cdots + a_{mn}x_n^{(0)}\right).$$

Пропорциональны расстояниям от точки $M\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)$ до граничных гиперплоскостей:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m.$$

Действительно по определению расстояние от точки М до $\imath -$й гиперплоскости равно

$$h_\imath = \frac{b_\imath - \left(a_{\imath j}x_1^{(0)} + a_{12}x_2^{(0)} + \cdots + a_{\imath n}x_n^{(0)}\right)}{\sqrt{a_{\imath 1}^2 + a_{\imath 2}^2 + \cdots + a_{\imath n}^2}} \qquad (\imath = 1,2,\dots,m).$$

Откуда и следует, что

$$\mu_1 = h_1\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1n}^2},$$

$$\mu_2 = h_2\sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2 + \cdots + a_{2n}^2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mu_m = h_m\sqrt{a_{m1}^2 + a_{m2}^2 + \cdots + a_{mn}^2}$$

Применение симплекс-метода для решения линейных программ. Для решения системы линейных неравенств в контексте линейного программирования часто используется симплекс-метод, который ищет оптимальное решение путем перемещения по вершинам многогранника, образованного ограничениями задачи. Симплекс-метод работает с таблицей, которая представляет собой систему линейных уравнений, а дополнительные переменные (μ_i) вносят коррективы в начальную таблицу, что позволяет гарантировать нахождение допустимого решения [2, 65б.].

Предположим, что у нас есть задача линейного программирования:

$$\text{maximize } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

при ограничениях:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \le b_1$$

$$a_2x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \le b_2$$

$$\dots$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0$$

Для применения симплекс-метода сначала преобразуем неравенства в уравнения, введя дополнительные переменные. После этого решается система уравнений, в которой на каждом шаге вычисляются новые значения переменных с учетом оптимизации целевой функции.

Заключение. В данной работе был рассмотрен процесс преобразования системы линейных неравенств в эквивалентную систему линейных уравнений с дополнительными неотрицательными переменными. Это преобразование имеет важное значение для задач линейного программирования, так как позволяет свести решение системы неравенств к решению системы уравнений, что упрощает поиск оптимальных решений. Показано, что каждое решение системы неравенств соответствует определенному решению системы линейных уравнений, а также проведена геометрическая интерпретация решений через многогранники и гиперплоскости. Этот подход является эффективным инструментом для анализа и решения задач линейного программирования, а также может быть использован в различных областях, где требуется оптимизация при соблюдении линейных ограничений. Также были рассмотрены практические аспекты применения симплекс-метода, который позволяет эффективно решать задачи линейного программирования.

В целом, результаты работы подчеркивают важность преобразования и анализа систем линейных неравенств для успешного применения методов линейного программирования.

Список литературы

1. Ниязов, Б. М., Ташова, М. К. Методы оптимизации и их применения в теории управления. – Бишкек: Академия, 2021.
2. Жумаев, Э. Б., Исаев, М. Б. Линейное программирование и его приложение в задачах управления и экономики. – Бишкек: КГУ им. И. Арабаева, 2020.
3. Шмидт, А. Н., Попов, С. В. Модели и алгоритмы в линейном программировании. – М.: Дашков и Ко, 2022.
4. Мухамедова, Н. Т., Батырбеков, Т. К. Алгоритмы линейного программирования для решений оптимизационных задач в инженерии. – Бишкек: КНИТУ, 2023.
5. Исакова, Р. С., Абдурахманова, С. Р. Современные методы оптимизации: теоретические и прикладные исследования. – Бишкек: Слово, 2018.

Рецензент: доктор физико-математических наук, и.о. профессора Алымбаев А.Т.